【第 1 問】(1)　$10^4=10000$　を 2020 で割ると　$\begin{array}{r} 5 \\ 2020\,\overline{)\,10000} \\ \underline{10100} \\ -100 \end{array}$　のように　-100　が余る。(商を 4 でなく 5 とする。) よって

$10^4=10000\equiv-100\,(mod.\,2020)$　,
$10^8\equiv(10^4)^2=(-100)^2\equiv-100\,(mod.\,2020)$　,
$10^{10}=10^8\times100\equiv-100\times100=-10000\equiv-(-100)=100\,(mod.\,2020)$　剰余は 100 (答)

(2) 10 のベキの剰余を計算してみよう。
$10^0\equiv1$　,　$10^1\equiv10$　,
$10^2\equiv100$　,　$10^3\equiv1000$　,　$10^4\equiv-100$　,　$10^5\equiv-1000$　,
$10^6\equiv100$　,　$10^7\equiv1000$　,　$10^8\equiv-100$　,　$10^9\equiv-1000$　,
……………………………………………………………
つまり指数が 0, 1 は例外として、原則 4 で割った剰余が 0,1,2,3 であるのに従って、

$$10^n\equiv-100,-1000,100,1000$$

となる。
ア) 1000010000 のように　$10^{99}+10^n\equiv0$　になる場合
$10^{99}\equiv1000$　だから　$10^n\equiv-1000$　となる。　$n=5,9,13,\cdots,97$　に対応する 24 個
イ) 2000000000 の場合
$2\times10^{99}\equiv2000$　だから 2020 では割り切れない。
つごう合わせて剰余＝0 の数は 24 個(答)

【第 2 問】　$t=\tan\theta$　とおけば　$\dfrac{2t}{1-t^2}+at=0$　となる。対応　$\theta\to t$　は 1 対 1 だから、この方程式の解の個数を検討すればよい。分母を払って整理すれば

$$t(at^2-a-2)=0,t\neq\pm1\quad(*)$$

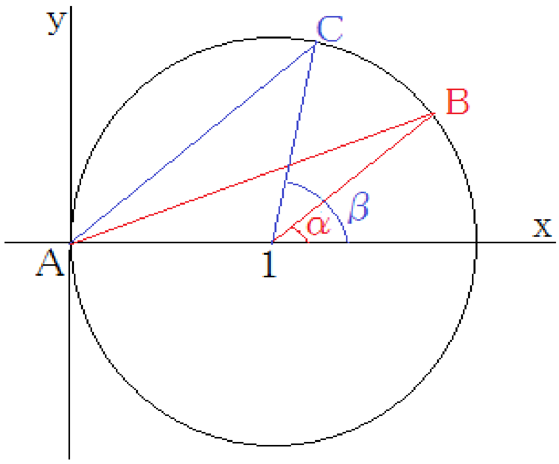
カッコの中が 2 次式　$(a\neq0)$　なら　$t^2=\dfrac{a+2}{a}$　となるから右辺の符号で判断できる。

ア)　$a=0$　のとき
(*) の解は　$t=0$　のみの 1 個
イ)　$a(a+2)>0$　のとき、すなわち　$a<-2,0<a$　のとき
(*) の解は　$t=0,\pm\sqrt{\dfrac{a+2}{a}}$　の 3 個
ウ)　$-2<a<0$　のとき
$t^2=\dfrac{a+2}{a}<0$　は実数解を持たないから、(*) の解は　$t=0$　のみの 1 個
エ)　$a=-2$　のとき
(*) は　$t^3=0$　となって、解は　$t=0$　のみの 1 個

以上をまとめると
$-2\leq a\leq0$　のとき 1 個,
$a<-2,0<a$　のとき 3 個(答)

【蛇足】　$a\neq0$　ならば　$\tan2\theta+a\tan\theta=0$　において　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　は解にはならない、と考えることに全員同意するだろう。でも、　$a=0$　だったら「解にならない」と考える人と「　$\tan2\theta=0$　なんだから解になる」と考える人とに分かれるに違いない。(筆者は前者の立場。) 問題文に「　a　を 0 でない定数とし」とするのが無難であろう。

【第 3 問】図のように点 A を原点とし、点(1,0) を中心とする円を考える。点 B は第 1 象限または x 軸上にあるとしよう。だから



$B(1+\cos\alpha, \sin\alpha)(0\leq\alpha<\pi)$,

$C(1+\cos\beta, \sin\beta)(-\pi<\beta<\pi)$

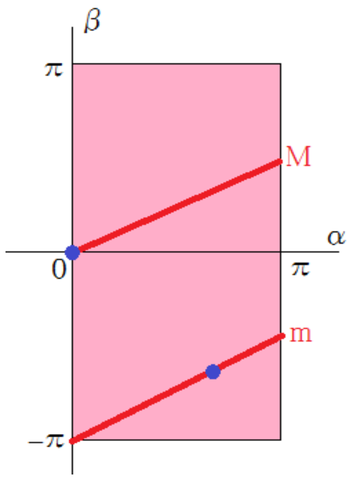
となる。点 (α, β) が動く範囲は右下の図になる。

内積は

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha+\cos\beta+1$$
$$=\cos(\alpha-\beta)+\cos\alpha+\cos\beta+1$$

ここで α を固定して考える。内積は

$$\cos\beta+\cos(\beta-\alpha)+\cos\alpha+1$$
$$=2\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha+1$$



カッコ内は $-\frac{3}{2}\pi<\beta-\frac{\alpha}{2}<\pi$ の範囲を動くから、この内積の最大値・最小値は

最大値: $M=2\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha+1$ ($\beta-\frac{\alpha}{2}=0$ のとき),

最小値: $m=-2\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha+1$ ($\beta-\frac{\alpha}{2}=-\pi$ のとき)

次に α を変化させて、最大・最小を求める。

ア) 求めるべき最大値は、最大値の最大値を考えて

$$M=2\cos\frac{\alpha}{2}+\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)+1$$
$$=2\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

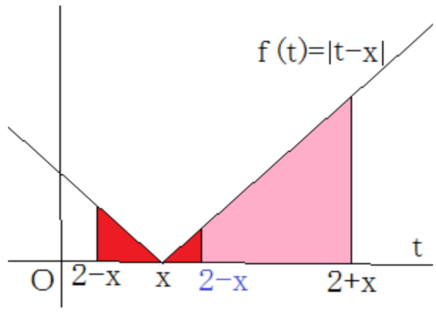
の最大値が答で、 $\alpha=0, \beta=0, M=2\left(1+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=4$ (答)

イ) 求めるべき最小値は、最小値の最小値を考えて

$$m=-2\cos\frac{\alpha}{2}+\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)+1$$
$$=2\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

の最小値が答で、 $\alpha=\frac{2}{3}\pi, \beta=-\frac{2}{3}\pi, m=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ (答)

【第 4 問】t の 1 次関数　$f(t)=t-x$　の零点は　$t=x$　だから、絶対値関数はこの点で折れ曲がる。　$2-x<x$　すなわち　$x>1$　のとき折れ曲がる。



ア)　$x>1$　のとき、三角形の面積の公式から

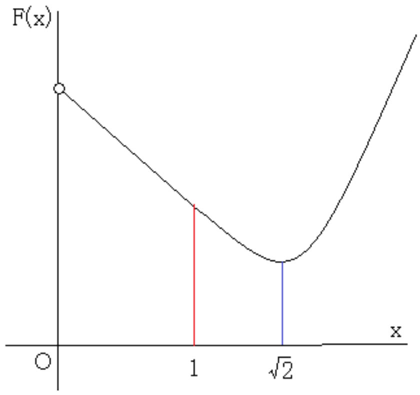
$$F(x)=\frac{1}{x}\{\frac{1}{2}(2x-2)(2x-2)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\}$$

$$=\frac{1}{x}\{2(x-1)^2+2\}=\frac{2x^2-4x+4}{x}\quad ,$$

$$F'(x)=\frac{(4x-4)x-(2x^2-4x+4)}{x^2}=\frac{2x^2-4}{x^2}$$

$x=\sqrt{2}$　が臨界点で、この前後で減少から増加に転ずる。

よって　$F(\sqrt{2})=\dfrac{4-4\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}-4$　が極小値。



イ)　$x\leq 1$　のとき、台形の面積の公式から

$$F(x)=\frac{1}{x}\times\frac{\{(2-2x)+2\}(2x)}{2}$$

$$=-2x+4\quad ,$$

単調減少で右端点で　$F(1)=-2+4=2$　になる。

結局、　$F(x)$　は　$x=1$　で連続で、最小値は

$$F(\sqrt{2})=4\sqrt{2}-4\quad \text{(答)}$$

【第 5 問】(1) ア) ちょうど 1 点で終了は「表」が出ることだから　$p_1=\dfrac{1}{2}$

イ) ちょうど 2 点で終了は「表表」または「裏」が出ることだから　$p_2=(\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

ウ) ちょうど 3 点で終了は

「表表表」,「表裏」,「裏裏裏」

が出ることだから　$p_3=(\dfrac{1}{2})^3+{}_2C_1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{8}$

エ) ちょうど 4 点で終了は

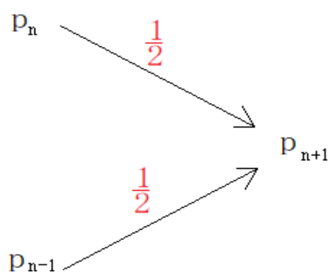
「表表表表」,「表表裏」,「裏裏」

が出ることだから　$p_4=(\dfrac{1}{2})^4+{}_3C_1\cdot(\dfrac{1}{2})^2\cdot\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{11}{16}$

(2) ちょうど　$n+1$　点を取った状態の、1 回前は　n　点だったか、　$n-1$　点だったかのどちらかだ。それぞれの確率は

$$p_n\,,\,p_{n-1}$$

だが、このあと 1 回コインを投げると　$n+1$　点になるのだから右の樹形図が成立し、



$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}p_{n-1}$$

(上記のア～エで試すとマチガイないと分かる。) 上式を変形すると

$$p_{n+1}-p_n=-\frac{1}{2}(p_n-p_{n-1})$$

だから

$$p_{n+1}-p_n=-\frac{1}{2}(p_n-p_{n-1})=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(p_{n-1}-p_{n-2})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(p_2-p_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

よって

$$|p_{n+1}-p_n|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}<\frac{1}{100}$$

$n+1=7$ で初めて $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{128}<\frac{1}{100}$ となるから、最小の n は $n=6$ (答)