〔１〕　a, b を正の定数とする。$0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対し，平面上で，次の三つの条件 (i)，(ii)，(iii) を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える。

(i) $\mathrm{PA} = a$，$\mathrm{PB} = b$，$\angle\mathrm{APB} = \theta$ である。

(ii) 2 点 C，D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある。

(iii) $\mathrm{AB} = 3\,\mathrm{AD}$ である。

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 辺 AB の長さを a，b，θ を用いて表せ。

(2) S を a，b，θ を用いて表せ。

(3) θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし，S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする。M を a，b を用いて表せ。また，$\sin\beta$ および $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(4) $a = 16$，$b = 25$ とする。また，β を (3) で定めた値とする。$\theta = \beta$ のときの，点 P と直線 AB の距離を求めよ。

〔２〕　i を虚数単位とする。$z \neq -1$ を満たす複素数 z に対し，

$$w = \frac{z-i}{z+1}$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) $z \neq -1$ のとき $w \neq 1$ であることを示せ。また，$w \neq 1$ のとき，z を w を用いて表せ。

(2) t を -1 と異なる実数とする。複素数平面において，実部が t である複素数全体の描く直線を ℓ_t とおく。点 z が直線 ℓ_t 上を動くとき，点 w はある円 S_t から 1 点を取り除いた図形の上を動く。この円 S_t の中心 P_t に対応する複素数を t を用いて表せ。

(3) P_t を (2) で定義した点とする。t が -1 以外の実数全体を動くときに P_t が描く図形を，複素数平面上に図示せよ。

〔 3 〕 関数 $f(x) = xe^{-2x^2}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) 関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ。また，極大値をとるときの x の値，および極小値をとるときの x の値を求めよ。

(2) $a > 0$ とし，点 $\mathrm{A}(a, 0)$ を考える。また，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線を ℓ_t とおく。ℓ_t が点 A を通るような実数 t がちょうど二つあるとする。このとき，a の値を求めよ。さらに，その二つの t の値を p，q（ただし，$p < q$）とおくとき，p，q を求めよ。

(3) q を (2) で定めた値とする。曲線 $y = f(x)$，直線 $x = q$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

〔 4 〕　n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx \, dx$$

の値を求めよ。

(2) 定積分

$$\int_0^{\pi} \left| \sin nx \right| \, dx$$

の値を求めよ。

(3) 座標平面において連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{2}, \quad y \leqq \left| \sin nx \right|$$

の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(4) 座標平面において連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{x} \left| \sin nx \right|$$

の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

〔５〕　1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目を a_1，2 回目に出た目を a_2, 3 回目に出た目を a_3 とする。次に, 1 枚の硬貨を 3 回投げる。$k = 1, 2, 3$ に対し，k 回目に表が出た場合は $b_k = 1$，裏が出た場合は $b_k = a_k$ とおく。ベクトル

$$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である確率を求めよ。

(2) $b_1 = 1$ である確率を求めよ。

(3) $\overrightarrow{b} = (1, 1, 1)$ であったとき，$\overrightarrow{a} = (1, 1, 5)$ である条件付き確率を求めよ。

(4) $\overrightarrow{b} = (1, 1, 1)$ であったとき，$a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である条件付き確率を求めよ。