【1】(1) 余弦定理より

$$AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\quad \text{(答)}$$

(2) 三角形の面積の公式を使い、それに長方形の面積を足せばよい。

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta+AB\times\frac{1}{3}AB=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{3}(a^2+b^2-2ab\cos\theta)$$

(3) $S=\frac{ab}{6}(3\sin\theta-4\cos\theta)+\frac{1}{3}(a^2+b^2)$ と変形して単振動の合成。

$$S=\frac{5ab}{6}(\sin\theta\cdot\frac{3}{5}-\cos\theta\cdot\frac{4}{5})+\frac{1}{3}(a^2+b^2)=\frac{5ab}{6}\cdot\sin(\theta-\alpha)+\frac{1}{3}(a^2+b^2)$$

ただし $\cos\alpha=\frac{3}{5},\sin\alpha=\frac{4}{5}$ である。これが最大になるのは $\theta-\alpha=\frac{\pi}{2}$ のときで、最大値は

$$M=\frac{5ab}{6}+\frac{1}{3}(a^2+b^2)\quad \text{(答)}$$

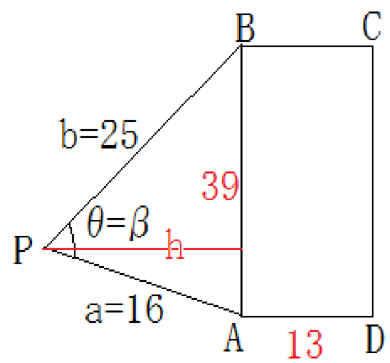
で、そのとき $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2},\sin\beta=\cos\alpha=\frac{3}{5},\cos\beta=-\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ (答)

(4) S が最大になったとき、 $AB=\sqrt{a^2+b^2+\frac{8}{5}ab}=\sqrt{16^2+25^2+16\times40}=39$

ここから底辺×高さ÷2で面積を求めて、それが $M=\frac{5}{6}\times16\times25+\frac{1}{3}(16^2+25^2)=627$ に等しいとおこう。

高さ(P と AB の間の距離)を h とおく。

$$\frac{1}{2}\cdot39h+39\times13=627\to h=\frac{120\times2}{39}=\frac{80}{13}\quad \text{(答)}$$



【2】(1) もし w=1 になることがあったとすると $w=\frac{z-i}{z+1}=1 \to z-i=z-1 \to i=1$ 矛盾。■

分母を払って $(z+i)w=z-i \to (w-1)z=-w-i \to z=\frac{-w-i}{w-1}$ (答)

(2) $z=\frac{-w-i}{w-1}$ の実部 = t , すなわち $\frac{1}{2}(z+\bar{z})=t$ だから

$$\frac{-w-i}{w-1}+\frac{-\bar{w}+i}{\bar{w}-1}=2t \to (-w-i)(\bar{w}-1)+(w-1)(-\bar{w}+i)=2t(w-1)(\bar{w}-1) ,$$

$$-2w\bar{w}+(1+i)w+(1-i)\bar{w}=2t(w\bar{w}-w-\bar{w}+1) ,$$

$$(2t+2)w\bar{w}-(2t+1+i)w-(2t+1-i)\bar{w}=-2t ,$$

$$w\bar{w}-\frac{2t+1+i}{2t+2}w-\frac{2t+1-i}{2t+2}\bar{w}=\frac{-t}{t+1} ,$$

$$\left(w-\frac{2t+1-i}{2t+2}\right)\left(\bar{w}-\frac{2t+1+i}{2t+2}\right)=\frac{-t}{t+1}+\frac{(2t+1)^2+1}{4(t+1)^2}=\frac{1}{2(t+1)^2} ,$$

$$\left|w-\frac{2t+1-i}{2t+2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}|t+1|}$$

w は中心 $\frac{2t+1-i}{2t+2}$ (答)

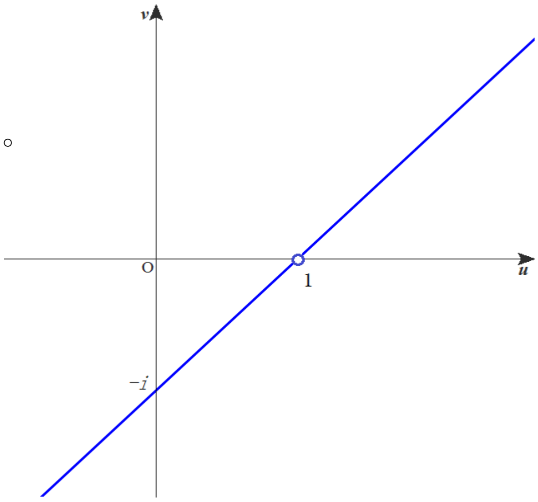
で、半径 $\frac{1}{\sqrt{2}|t+1|}$ の円周上を動く。(ただし w=1 を除く。)

(3) P_t が表す複素数を $u+iv=\frac{2t+1-i}{2t+2}$ とおく。

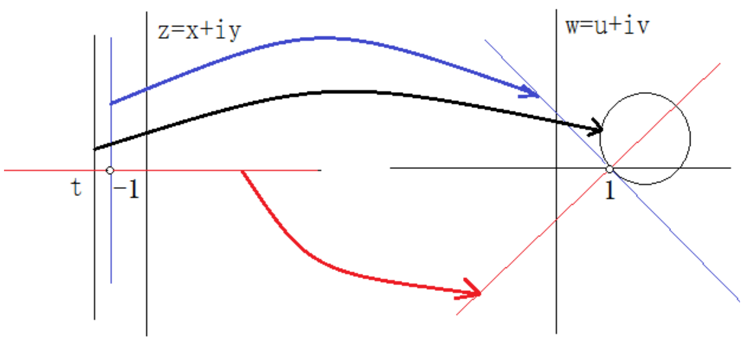
$$u=\frac{2t+1}{2t+2}=1-\frac{1}{2t+2}, v=-\frac{1}{2t+2}$$

となるので、ここから t を消去して $v=u-1$

図を描けば傾き 1 , 切片 - i の直線で、1 なる点を除く。



【蛇足】円円対応と言って、円(半径∞の円として直線を含む)は円に写像される。虚軸に平行な直線は P_t を中心とする円に移る訳だ。ついでに言うと実軸は(3)の答に移り、実部が -1 の直線は図中青色の傾き -1 の直線に移る。



【3】(1)　$f'(x)=e^{-2x^2}+x\cdot(-4x)e^{-2x^2}=-(4x^2-1)e^{-2x^2}$　だから臨界点は　$x=\pm\frac{1}{2}$

増減表は右の如し。

極大値は　$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2\sqrt{e}}$　,

極大値は　$f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2\sqrt{e}}$　(答)

x	…	$-\frac{1}{2}$	…	$\frac{1}{2}$	…
f'	−	0	+	0	−
f	↘	$-\frac{1}{2\sqrt{e}}$	↗	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	↘

(2) 接線の方程式は

$$y-te^{-2t^2}=-(4t^2-1)e^{-2t^2}(x-t)$$

これが点　$(a,0)$　を通るから

$$-te^{-2t^2}=-(4t^2-1)e^{-2t^2}(a-t)$$

この方程式の実数解がちょうど 2 個であればよい。式変形して

$$t=(4t^2-1)(a-t)\quad,\quad t+\frac{t}{4t^2-1}=a$$

左辺の関数のグラフを描こう。

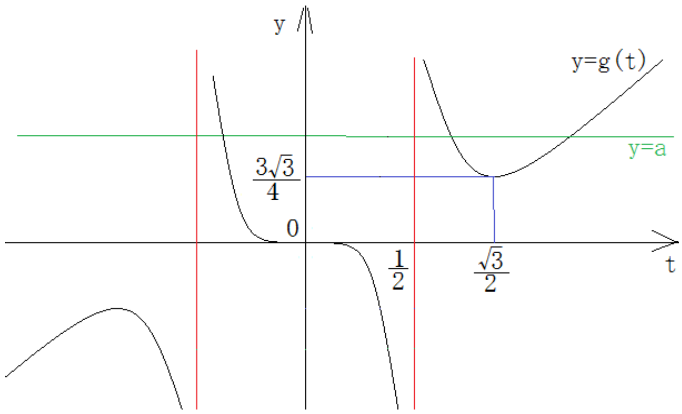
$$g(t)=t+\frac{t}{4t^2-1}$$

とおく。奇関数であり、　$t=\pm\frac{1}{2}$　が漸近線と分かる。

$$g'(t)=1+\frac{(4t^2-1)-t(8t)}{(4t^2-1)^2}=1-\frac{4t^2+1}{(4t^2-1)^2}=\frac{16t^4-12t^2}{(4t^2-1)^2}=\frac{4t^2(4t^2-3)}{(4t^2-1)^2}$$

$t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　が極大・極小点で、　$t=0$　も臨界点だが停留点である。

t	0	…	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	…
g'	0	−	$-\infty$	−	0	+
g	0	↘		↘	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗



2 つのグラフの交点が 2 個になるのは a>0 の範囲では　$a=g(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$　(答)

もう 1 か所同じ値を取る場所は

$$t+\frac{t}{4t^2-1}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

なる方程式を解けばよい。分母を払って整理すれば　$4t^3-3\sqrt{3}t^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}=0$

重解が分かっているので　$(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=t^2-\sqrt{3}t+\frac{3}{4}$　で割り算すれば、

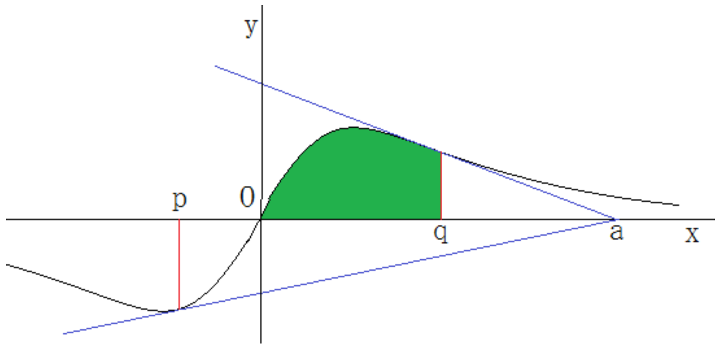
$$(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2(4t+\sqrt{3})=0$$

と因数分解できる。よって　$p=-\frac{\sqrt{3}}{4}, q=\frac{\sqrt{3}}{2}$　(答)

(3) $S=\int_0^q x e^{-2x^2} dx$

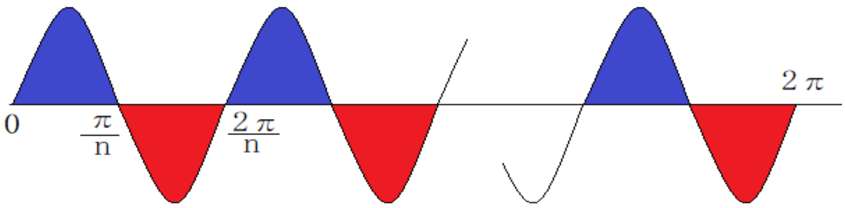
$=[-\frac{1}{4}e^{-2x^2}]_0^q=-\frac{1}{4}(e^{-2q^2}-1)$

$=-\frac{1}{4}(e^{-\frac{3}{2}}-1)=-\frac{1}{4}(\frac{1}{e\sqrt{e}}-1)$ (答)



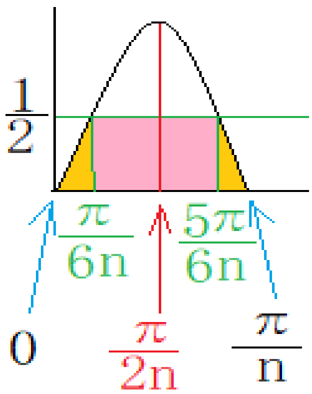
【4】(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/n}\sin nx\,dx=\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi/n}=-\frac{1}{n}(-1-1)=\frac{2}{n}$ (答)

(2) sin nx の周期は $\dfrac{2\pi}{n}$ であるから、右図のように山(青) と谷(赤) が計 2n 個できる。ところが 0 ~ π の積分では山・谷は半分の計 n 個だ。



$$S=\int_0^{\pi/n}\sin nx\,dx\times n=n\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi/n}=-1(-1-1)=2 \quad (答)$$

(3) 山 1 個分を計算して n 倍すればよい。回転体＋円柱で



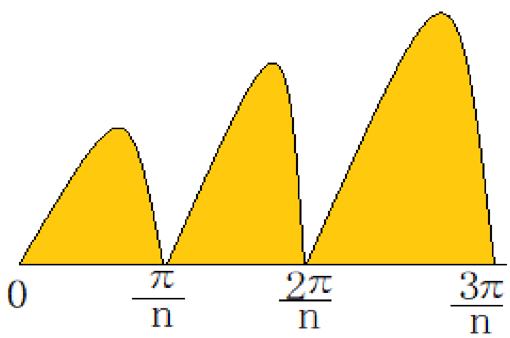
$$V_0=2\left\{\pi\int_0^{\pi/6n}\sin^2 nx\,dx+\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{6n}\right)\right\}$$
$$=2\left\{\pi\int_0^{\pi/6n}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx+\frac{\pi^2}{12n}\right\}$$
$$=\pi\left[x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi/6n}+\frac{\pi^2}{6n}$$
$$=\pi\left(\frac{\pi}{6n}-\frac{1}{2n}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\pi^2}{6n}=\frac{\pi^2}{3n}-\frac{\sqrt{3}\pi}{4n}$$

よって $V=nV_0=\dfrac{\pi^2}{3}-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}$ (答)

(4) 山は段々大きくなるので単純に n 倍では駄目だ。1 個の山は

$$V_k=\pi\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n}x\sin^2 nx\,dx$$

だが、部分積分をすると



$$\int x\sin^2 nx\,dx=\int x\cdot\frac{1-\cos 2nx}{2}dx$$
$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{2n}\sin 2nx-\int\frac{1}{2n}\sin 2nx\,dx\right\}$$
$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{x}{4n}\sin 2nx-\frac{1}{8n^2}\cos 2nx+C$$

だから

$$V_k=\pi\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{x}{4n}\sin 2nx-\frac{1}{8n^2}\cos 2nx\right]_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n}=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{k^2\pi^2}{n^2}-\frac{(k-1)^2\pi^2}{n^2}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{k^2\pi^2}{n^2}-\frac{(k-1)^2\pi^2}{n^2}\right\}=\frac{\pi^3}{4n^2}(2k-1)$$

あとはこれの k=1 ～n の総和を取って

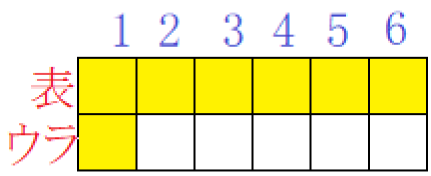
$$V=\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^3}{4n^2}(2k-1)=\frac{\pi^3}{4n^2}\cdot\frac{n(1+2n-1)}{2}=\frac{\pi^3}{4} \quad (答)$$

【5】(1)　$a_1+a_2+a_3=7$　において各項から 1 を引く。 $(a_1-1)+(a_2-1)+(a_3-1)=4$
これで各　$a_i-1\geq 0$　となるので、饅頭と仕切り板が使える。
例えば右図の場合は　$a_1-1=2, a_2-1=1, a_3-1=4$　を意味する。　　○ ○ | ○ | ○
饅頭 4 個と、仕切り板 2 枚を 1 列に並べる方法は　$\dfrac{6!}{4!2!}=15$　通り。
さいころの目の出方は全部で　6^3　通りだから、求めるべき確率は　$\dfrac{15}{6^3}=\dfrac{5}{72}$　(答)

(2) 表が出るか、裏が出てかつさいころが 1 だから、

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{12}\quad\text{(答)}$$

(右図を見れば計算するまでもない。)



(3)　$\vec{b}=(1,1,1)$　が起こるとは、
　　「表または(ウラ 1)」かつ「表または(ウラ 1)」かつ「表または(ウラ 1)」
のことであり、その確率は　$p_1=\dfrac{7}{12}\times\dfrac{7}{12}\times\dfrac{7}{12}$
また、　$\vec{a}=(1,1,5)$　が起こるとは、当然
　　「(1)」かつ「(1)」かつ「(ウラ 5)」
のことである。これら 2 つの事象が同時に起こるとは、
　　「(表 1)または(ウラ 1)」かつ「(表 1)または(ウラ 1)」かつ「(ウラ 5)」
だから、積事象の確率は

$$p_2=\frac{2}{12}\times\frac{2}{12}\times\frac{1}{12}$$

したがって、条件付き確率は　$\dfrac{p_2}{p_1}=\dfrac{\frac{2}{12}\times\frac{2}{12}\times\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}}=\dfrac{4}{343}$　(答)

(4)　$a_1+a_2+a_3=7$　に出てくる 3 つの項の中に 1 があるのとないのでは状況が異なる。
ア)　$\vec{a}=(1,1,5)$　のように 1 が 2 個ある場合。
これと　$\vec{b}=(1,1,1)$　が同時に起こる確率は先述したように　$\dfrac{2}{12}\times\dfrac{2}{12}\times\dfrac{1}{12}$　だが、どこが 1 でないかで 3 通りの任意性があるから 3 倍して、

$$p_3=\frac{2}{12}\times\frac{2}{12}\times\frac{1}{12}\times 3$$

イ)　$\vec{a}=(1,2,4)$　のように 1 が 1 個だけある場合。
これと　$\vec{b}=(1,1,1)$　が同時に起こる確率は
　　「(1)」かつ「(ウラ 2)」かつ「(ウラ 4)」
で、　$\dfrac{2}{12}\times\dfrac{1}{12}\times\dfrac{1}{12}$　だが、1 の置き場所 3 通りと、残り 2 数が 24, 33, 42 の 3 通りの任意性があって

$$p_4 = \frac{2}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times 9$$

ウ)　$\vec{a} = (2,2,3)$　のように 1 が 1 個もない場合。

これと　$\vec{b} = (1,1,1)$　が同時に起こる確率は

「(ウラ 2)」かつ「(ウラ 2)」かつ「(ウラ 3)」

で、　$\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12}$　だが、これが(1) で出した 15 通りから引いて 3 通りの任意性がある (たしかに 223, 232, 322 の 3 通りだ) から

$$p_5 = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times 3$$

したがって、条件付き確率は

$$\frac{p_3 + p_4 + p_5}{p_1} = \frac{\frac{2}{12} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{12} \times 3 + \frac{2}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times 9 + \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times 3}{\frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12}} = \frac{12 + 18 + 3}{343} = \frac{33}{343} \quad \text{(答)}$$