1 n, m は自然数で $n > m$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $n - m$ が奇数のとき，$n^2 + m^2$ を 4 で割ったときの余りは 1 であることを証明せよ。

(2) $n^3 + m^3 - nm^2 - n^2m - 62n + 62m$ が 10 以下の素数となるような n，m の組をすべて求めよ。

2 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，辺 AB，AC，CD，BD を $x : (1 - x)$ に内分する点を，それぞれ P，Q，R，S とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$0 < x < 1$ とする。

(1) 線分 QR の長さの 2 乗を求めよ。

(2) 四角形 PQRS の面積を $f(x)$ とする。関数 $y = \{f(x)\}^2$ のグラフをかけ。

3 放物線 $y=-x^2+1$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ -t^2+1)$ における接線を ℓ とする。また，点 $\mathrm{B}(15,\ -7)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に接線 ℓ が垂直となるような点 A の個数を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

(1) 次の定積分を求めよ。

$$\int_7^{14} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$$

(2) 曲線 $y = \log x$ と x 軸，および直線 $x = e$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。ただし，e は自然対数の底とする。

5 曲線 $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ 上の点 $\left(a,\ \dfrac{1}{a^2+1}\right)$ における接線の y 切片を $f(a)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(a)$ を求めよ。

(2) a が実数全体を動くとき，$f(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ。

6　数列 $\{a_n\}$ は次を満たすとする。

$$a_1 = 6, \qquad a_{n+1} = \frac{6a_n + 5}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_n - 5 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

と定める。このとき，すべての自然数 n に対して，$b_n > 0$ が成り立つことを示せ。

(2)　(1) で定めた $\{b_n\}$ に対して，数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ の一般項を求めよ。また，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　自然数 n に対して，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k - \frac{5001}{1000}\right)$$

と定める。このとき，S_n が最大となる n を求めよ。

7 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin\theta + \cos\theta + \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$$

8 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{4}\left\{x^2 + x - 2\log(2x+1)\right\}$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ。必要があれば，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを用いてよい。

(2) 曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の長さを求めよ。

9 Aの袋には赤球2個，白球3個，青球2個，Bの袋には赤球3個，白球4個が入っている。A，Bの袋から2個ずつ合計4個の球を取り出す。このとき，取り出された4個の球の色が2色以下である確率を求めよ。