【1】(1)　$n-m$　が奇数だから、どちらかが奇数で他方が偶数である。
一方を　$2k+1$　, 他方を　$2l$　とおけば

$$n^2+m^2=(2k+1)^2+(2l)^2=4(k^2+4k+4l^2)+1$$

だから、4 で割れば1余る。■

(2) 与式＝　$(n-m)(n^2-m^2)-62(n-m)=(n-m)\{(n-m)(n+m)-62\}$　が素数 2, 3, 5, 7 に等しい。
　$n-m=1$　または　$(n-m)(n+m)=63$　である。
ア)　$n-m=1$　のとき　$(n-m)(n+m)-62=n+m-62=2,3,5,7$
　これより　$(n,m)=(33,32),(34,33),(35,34)$
イ)　$n-m=3, n+m=21$　のとき
　これより　$(n,m)=(12,9)$
ウ)　$n-m=7, n+m=9$　のとき
　これより　$(n,m)=(8,1)$
(答)　$(n,m)=(33,32),(34,33),(35,34),(12,9),(8,1)$

【2】(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}, \overrightarrow{AD}=\vec{d}$　とおく。

$$\overrightarrow{AR}=(1-x)\vec{c}+x\vec{d}, \overrightarrow{AQ}=x\vec{c}$$

だから

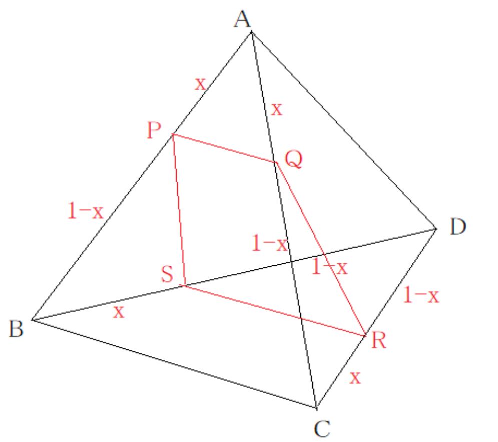
$$\overrightarrow{QR}=(1-x)\vec{c}+x\vec{d}-x\vec{c}=(1-2x)\vec{c}+x\vec{d}\ ,$$

$$|\overrightarrow{QR}|^2=(1-2x)^2|\vec{c}|^2+2x(1-2x)\vec{c}\cdot\vec{d}+x^2|\vec{d}|^2$$

$\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}|\cdot|\vec{d}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$　だから

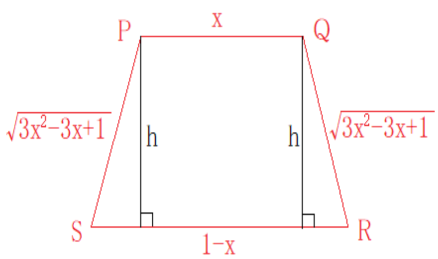
$$|\overrightarrow{QR}|^2=(1-2x)^2+x(1-2x)+x^2$$

$$=3x^2-3x+1\quad \text{(答)}$$



(2) PQ と SR は平行で、長さは正三角形ができるから
PQ=x, SR=1-x である。また、QR=PS だから、四角形 PQRS は
等脚台形である。その高さは

$$h=\sqrt{(3x^2-3x+1)-\left(\frac{1-x-x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{8x^2-8x+3}}{2}\ ,$$



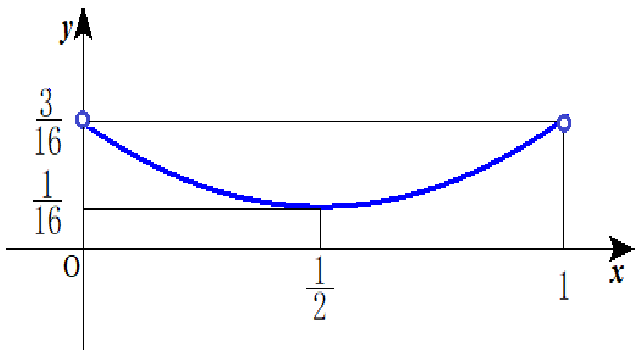
面積は

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot(x+1-x)\cdot\frac{\sqrt{8x^2-8x+3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{8x^2-8x+3}}{4}\ ,$$

2 乗して

$$f(x)^2=\frac{8x^2-8x+3}{16}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{16}$$



【3】(1) 接線の方程式は

$y-(-t^2+1)=-2t(x-t)$,

$y=-2tx+t^2+1$ (答)

(2) 接線の傾きは -2 t だから接ベクトルは $(1,-2t)$, また $\overrightarrow{AB}=(15-t,-7-(-t^2+1))$

これら 2 つのベクトルが垂直だから

$1(15-t)-2t(-8+t^2)=-(2t^3-15t-15)=0$

この 3 次方程式が何個の実数解を持つかを調べる。 $f(t)=-(2t^3-15t-15)=0$ とおけば

$f'(t)=-(6t^2-15)=-3(2t^2-5)$

より増減表は右図の通り。

$15-5\sqrt{10}=5(\sqrt{9}-\sqrt{10})<0, 15+5\sqrt{10}>0$

より $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{5}{2}}\right),\left(-\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right),\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\infty\right)$ の

各区間に 1 個ずつ実数解を持つ。よって実数解の個数は 3 個。(答)

t	…	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	…	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	…
f’	−	0	+	0	−
f	↘	$15-5\sqrt{10}$	↗	$15+5\sqrt{10}$	↘

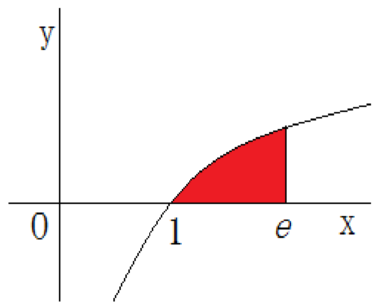
【4】(1) $\sqrt{x+2}=t$ と置換。 $x+2=t^2, dx=2t\,dt$ で

$$\int_7^{14}\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}=\int_3^4\frac{2t\,dt}{(t^2-4)t}=\frac{1}{2}\int_3^4\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right]_3^4=\frac{1}{2}(\log 5-\log 3) \text{ (答)}$$

(2) $V=\pi\int_1^e(\log x)^2dx=\pi\{[x(\log x)^2]_1^e-\int_1^e 2\log x\,dx\}$

$=\pi\{e-2([x\log x]_1^e-\int_1^e dx)\}=\pi\{e-2(e-(e-1))\}$

$=\pi(e-2)$ (答)

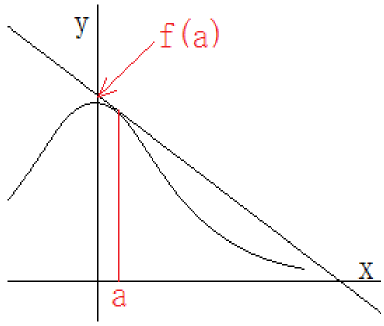


【5】(1) 接線の方程式は

$$y-\frac{1}{a^2+1}=\frac{-2a}{(a^2+1)^2}(x-a) \quad ,$$

その y 切片は

$$f(a)=\frac{2a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{1}{a^2+1}=\frac{3a^2+1}{(a^2+1)^2} \quad (答)$$



(2) 微分して

$$f'(a)=\frac{6a(a^2+1)^2-(3a^2+1)\cdot 4a(a^2+1)}{(a^2+1)^4}$$

$$=\frac{6a(a^2+1)-(3a^2+1)\cdot 4a}{(a^2+1)^3}=\frac{-6a^3+2a}{(a^2+1)^3}=\frac{-2a(3a^2-1)}{(a^2+1)^3}$$

より増減表は右図。

極大値かつ最大値は　$f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{9}{8}$　(答)

a	…	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	0	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…
f'	+	0	−	0	+	0	−
f	↗	$\frac{9}{8}$	↘	1	↗	$\frac{9}{8}$	↘

【6】(1)　$b_{n+1}=a_{n+1}-5=\frac{6a_n+5}{a_n+2}-5=\frac{a_n-5}{a_n+2}=\frac{a_n-5}{a_n-5+7}=\frac{b_n}{b_n+7}$

数学的帰納法を使う。

I) n=1 のとき　$b_1=a_1-5=1>0$

II)　$b_n>0$　ならば　$b_{n+1}=\frac{b_n}{b_n+7}>0$

すべての n について　$b_n>0$　■

(2) 先の漸化式の逆数をとって

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{b_n+7}{b_n}=1+7\cdot\frac{1}{b_n} \quad ,$$

$$\frac{1}{b_{n+1}}+\frac{1}{6}=7\left(\frac{1}{b_n}+\frac{1}{6}\right)$$

数列　$\{\frac{1}{b_n}+\frac{1}{6}\}$　は初項　$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$　, 公比 7 の等比数列で　$\frac{1}{b_n}+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}\cdot 7^{n-1}=\frac{7^n}{6}$　.

よって　$\frac{1}{b_n}=\frac{7^n}{6}-\frac{1}{6}$　(答)

$$a_n=b_n+5=\frac{6}{7^n-1}+5=\frac{5\cdot 7^n+1}{7^n-1} \quad (答)$$

(3)　$S_n=(a_1-\frac{5001}{1000})+(a_2-\frac{5001}{1000})+(a_3-\frac{5001}{1000})+\cdots$　だから、　$a_k-\frac{5001}{1000}\geq 0$　である限り(広義に)増加する。　$a_k-\frac{5001}{1000}\geq 0$　を満たす最大の k が求めるべき n に等しい。

$$\frac{5\cdot 7^k+1}{7^k-1}-\frac{5001}{1000}=\frac{5000\cdot 7^k+1000-5001\cdot 7^k+5001}{1000(7^k-1)}=\frac{6001-7^k}{1000(7^k-1)}$$

より　$7^k\leq 6001$　なる最大の k を求める。　$7^4=49^2=2401, 7^5=16807$　より　$n=Max(k)=4$　(答)

【7】 $x=\cos\theta, y=\sin\theta$ とおく。点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ は単位円上の点だから $x^2+y^2=1$.

与式の $x+y+xy=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ より、移項して2乗すると $(x+y)^2-2xy=(\frac{1}{2}+\sqrt{2}-xy)^2-2xy$.

$$1=(\frac{1}{2}+\sqrt{2})^2-2(\frac{1}{2}+\sqrt{2})xy+x^2y^2-2xy \quad ,$$

$$x^2y^2-(3+2\sqrt{2})xy+\frac{5}{4}+\sqrt{2}=0 \quad ,$$

$$(xy-\frac{1}{2})(xy-\frac{5+4\sqrt{2}}{2})=0 \quad ,$$

$$xy=\frac{1}{2}, \frac{5+4\sqrt{2}}{2} \quad .$$

ところが $xy=\frac{1}{2}\sin 2\theta\leq\frac{1}{2}$ より $xy=\frac{1}{2}\sin 2\theta=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$

途中で2乗したことによりこれは必要条件であって、十分条件ではない。

ア) $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ でOK。

イ) $\theta=\frac{5}{4}\pi$ のとき $\sin\frac{5}{4}\pi+\cos\frac{5}{4}\pi+\sin\frac{5}{4}\pi\cos\frac{5}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\sqrt{2}$ でNG。

(答) $\theta=\frac{\pi}{4}$

【8】(1) $f'(x)=\frac{1}{4}(2x+1-\frac{4}{2x+1})=\frac{4x^2+4x-3}{4(2x+1)}=\frac{(2x-1)(2x+3)}{4(2x+1)}$

増減表は右図の通り。 $3-\log 5=\log\frac{e^3}{5}>\log\frac{8}{5}>0$ に注意。

最大値 $f(2)=\frac{3-\log 5}{2}$,最小値 $f(\frac{1}{2})=\frac{3-8\log 2}{16}$ (答)

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	2
f'		−	0	+	
f	0	↘	$\frac{3-8\log 2}{16}$	↗	$\frac{3-\log 5}{2}$

(2) $l=\int_0^2\sqrt{1+f'(x)^2}dx=\int_0^2\sqrt{1+\frac{(2x-1)^2(2x+3)^2}{16(2x+1)^2}}dx$

$=\int_0^2\frac{\sqrt{16(2x+1)^2+(2x-1)^2(2x+3)^2}}{4(2x+1)}dx=\int_0^2\frac{\sqrt{16x^4+32x^3+56x^2+40x+25}}{4(2x+1)}dx$

$=\int_0^2\frac{4x^2+4x+5}{4(2x+1)}dx=\frac{1}{4}\int_0^2(2x+1+\frac{4}{2x+1})dx$

$=\frac{1}{4}[x^2+x+2\log(2x+1)]_0^2=\frac{1}{4}(4+2+2\log 5)$

$=\frac{1}{2}(3+\log 5)$ (答)

	$4x^2$	$4x$	5
$4x^2$	$16x^4$	$16x^3$	$20x^2$
$4x$	$16x^3$	$16x^2$	$20x$
5	$20x^2$	$20x$	25

【9】余事象である 3 色の確率を求める。
ア) A から青 2 個が出る場合

B から赤も白も出なければならない(白のみまたは赤のみの余事象)。確率は

$$\frac{1}{{}_7C_2}\times\left(1-\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}-\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}\right)=\frac{1}{21}\times\left(1-\frac{6}{21}-\frac{3}{21}\right)=\frac{1}{21}\times\frac{12}{21}$$

イ) A から青と赤が出る場合

B から少なくとも 1 個白が出ればよい。確率は

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_7C_2}\times\left(1-\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}\right)=\frac{2\times2}{21}\times\left(1-\frac{3}{21}\right)=\frac{4}{21}\times\frac{18}{21}$$

ウ) A から青と白が出る場合

B から少なくとも 1 個赤が出ればよい。確率は

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}\times\left(1-\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}\right)=\frac{2\times3}{21}\times\left(1-\frac{6}{21}\right)=\frac{6}{21}\times\frac{15}{21}$$

以上より 3 色の確率は

$$\frac{1}{21}\times\frac{12}{21}+\frac{4}{21}\times\frac{18}{21}+\frac{6}{21}\times\frac{15}{21}=\frac{12+72+90}{21\times21}=\frac{58}{147}$$

よって 2 色以下の確率は

$$1-\frac{58}{147}=\frac{89}{147}$$ (答)