【I】(1)　$\log_2 x^3 = \dfrac{\log x^3}{\log 2}$　だから　$y = \log(\dfrac{\log x^3}{\log 2}) = \log\log x^3 - \log\log 2$　. よって

$$y' = \frac{(\log x^3)'}{\log x^3} = \frac{(3\log x)'}{3\log x} = \frac{3}{x} \times \frac{1}{3\log x} = \frac{1}{x\log x}$$ (答)

(2)　$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$　より x= -1, 3 が臨界点で後者は極小点。最大値は左端点の

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{29}{8}$$ (答)

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	3
y'		−	0
y	$\frac{29}{8}$	↘	−27

(3) 第 1 式、第 3 式より

$$(n+1)a_{n+1} - na_n = r_{n+1} \quad ,$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k = r_{n+1} - a_n$$

だから

$$(n+1)a_{n+1} = na_n + r_{n+1} = na_n + b_{n+1} + a_n = (n+1)a_n + b_{n+1} \quad ,$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1} b_{n+1}$$ (答)

【II】(1)　$1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = 32+8+4+1 = 45$　(答)

(2)　$2\times k^2 + 1\times k^1 + 3\times k^0 = 2k^2 + k + 3 = 139 \to (2k+17)(k-8) = 0 \to k = 8$　(答)

(3)　$m^2 + 2m = 2n^2 + 3$　,

$3m + 3 = n^2 + 2$

の連立方程式を解いて　$m^2 - 4m - 5 = 0 \to (m+1)(m-5) = 0 \to m = 5$　,　$n^2 = 16 \to n = 4$　(答)

【III】(1)　$3!\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$　(答)

(2) 3 個とも同じ色の確率は　$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{9}$　で、余事象の確率により 2 個のみ同色は

$$1-\frac{2}{9}-\frac{1}{9}=\frac{2}{3}\quad (答)$$

(3)　$E=a^2\times\frac{1}{9}+a\times\frac{2}{3}+1\times\frac{2}{9}=\frac{a^2+6a+2}{9}$　(答)

(4)　$\frac{a^2+6a+2}{9}=3k$　(k は自然数) とおいて、2 次方程式　$a^2+6a+(2-27k)=0$　を解けば

$$a=-3\pm\sqrt{27k+7}$$

だからルートが外れるにはルートの中が 2 乗数でなければならない。k=1, 2, 3, … を代入して

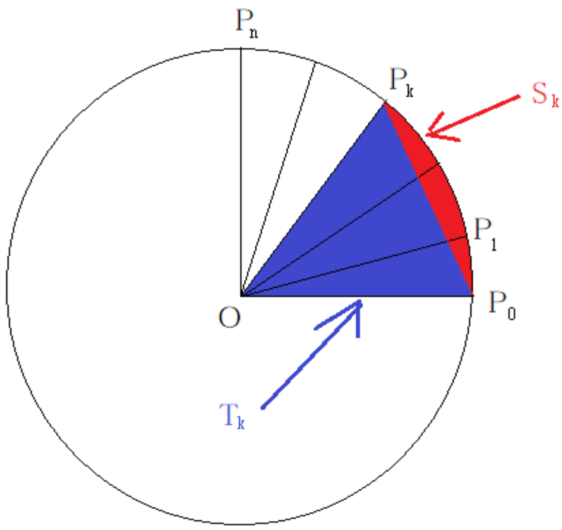
$$27k+7=34,61,88,115,142,169$$

だから　$k=6, a=-3\pm\sqrt{169}=-3\pm 13=10,-16$　. よって　$a=10$　(答)

【IV】(1) 三角形の面積は　$T_k=\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$　(答)

扇形の面積が　$\frac{k\pi}{4n}$　だから、月形の面積は差し引き

$$S_k=\frac{k\pi}{4n}-\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}\quad (答)$$



(2)　$T_k-S_k=\sin\frac{k\pi}{2n}-\frac{k\pi}{4n}$　だから

$$\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}(T_k-S_k)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi}{12}(1+2+3)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{\pi}{2}\right\}=\frac{3+\sqrt{3}-\pi}{6}\quad (答)$$

(3)　$\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(T_k-S_k)=\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}-\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{4n}=\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}-\lim\frac{\pi}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}k$

で、最終辺第 1 項は

$$\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}=\lim\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1=\frac{2}{\pi}\quad ,$$

第 2 項は

$$\lim\frac{\pi}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\lim\frac{\pi}{4n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\lim\frac{\pi}{8}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{8}\quad .$$

したがって　$\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(T_k-S_k)=\frac{2}{\pi}-\frac{\pi}{8}$　(答)