【I】(1) ア: n-1 回のうちちょうど 2 回だけ 3 が出て、n 回目に 3 が出るから

$$ {}_{n-1}C_2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\times\frac{1}{6}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{3}=\frac{(n-1)(n-2)5^{n-3}}{2\cdot 6^{n}} \quad (答) $$

イ: 1 回でも偶数が出ればよい。ということはすべて奇数の余事象だから

$$ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad (答) $$

ウ:余事象は、積が奇数または 2 の因子がちょうど 1 個である。「2 の因子がちょうど 1 個」というのは偶数の目は 2 か 6 のどちらかが 1 回だけ出る（4 は出ない）ということである。

$$ 1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+{}_{n}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{6}\right)^{1}\right\}=1-\frac{1}{2^{n}}-\frac{n}{3\cdot 2^{n-1}} \quad (答) $$

エ:「5,6 が出ない」事象から「1,2,3 しか出ない」事象を除けばよい。

$$ \left(\frac{4}{6}\right)^{n}-\left(\frac{3}{6}\right)^{n}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad (答) $$

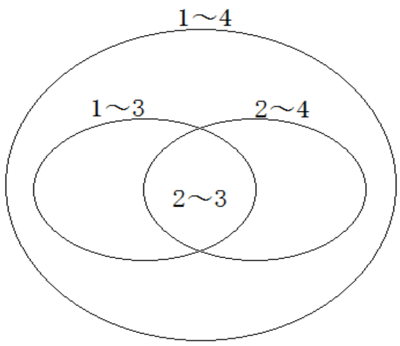
オ:(最大値, 最小値) の組合せは(1,4), (2,3), (3,6) がある。(右表)
表中、○は少なくとも 1 回は出る、×は 1 回も出ないを意味する。
表からこれらは排反事象と分かる。(1,4) の事象は「1～4 しか出ない」事象から、「1～3 しか出ない」と「2～4 しか出ない」の事象を除き、除きすぎた「2～3 しか出ない」事象を付け足せばよい。よって(1,4) の確率は

1	2	3	4	5	6
○			○	×	×
×	○			○	×
×	×	○			○

$$ \left(\frac{4}{6}\right)^{n}-\left(\frac{3}{6}\right)^{n}-\left(\frac{3}{6}\right)^{n}+\left(\frac{2}{6}\right)^{n}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n} $$

である。他の 2 つの場合も同じ確率だから、求めるべき確率は

$$ 3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}=\frac{2^{n}}{3^{n-1}}-\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}} \quad (答) $$



(2) カ: $\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}(3+\sqrt{3}i)}{12}=\dfrac{2\sqrt{2}}{12}\times 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ だから、偏角は

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ (答)

キ: $z_{n+1}=\alpha(z_n-\gamma)+\gamma=\alpha z_n+\gamma(1-\alpha)$ と係数比較して $\gamma(1-\alpha)=z_1\rightarrow\gamma=\dfrac{z_1}{1-\alpha}$

これを計算すると

$$\frac{z_1}{1-\alpha}=\frac{\sqrt{2}+(2\sqrt{3}-\sqrt{6})i}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}i\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}+(2\sqrt{3}-\sqrt{6})i\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}i\right)}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(2\sqrt{3}-\sqrt{6})\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}}{1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}+\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+(2\sqrt{3}-\sqrt{6})\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}i$$

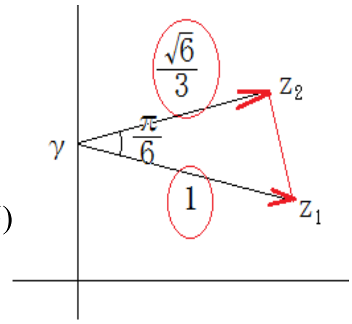
$$=\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+1}{\frac{5}{3}-\sqrt{2}}+\frac{\frac{10}{3}\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{\frac{5}{3}-\sqrt{2}}i=0+\frac{10\sqrt{3}-6\sqrt{6}}{5-3\sqrt{2}}i=\frac{2\sqrt{3}(5-3\sqrt{2})}{5-3\sqrt{2}}i=2\sqrt{3}i$$

実部は 0 で、虚部は $2\sqrt{3}$ (答)

ク: $z_1-\gamma=\sqrt{2}+(2\sqrt{3}-\sqrt{6})i-2\sqrt{3}i=\sqrt{2}-\sqrt{6}i$ を $\dfrac{\pi}{6}$ 回転し、

長さを $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 倍したものが $z_2-\gamma$ である。だから面積は

$$S_1=\frac{1}{2}|\sqrt{2}-\sqrt{6}i|\times\frac{\sqrt{6}}{3}|\sqrt{2}-\sqrt{6}i|\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}(2+6)\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{3} \quad (答)$$



ケ: n が 1 増えるごとに面積比(=相似比 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ の 2 乗) $\dfrac{2}{3}$ で三角形は縮小される。よって

$$S_n=S_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\sqrt{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (答)$$

コ: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)S_k=2S_1+3S_2+4S_3+\cdots=\sqrt{6}\left\{2\left(\frac{2}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)^2+4\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\right\}$ を求めたいのだから中カッコ内の和が分かればよい。無限等比級数の和の公式:

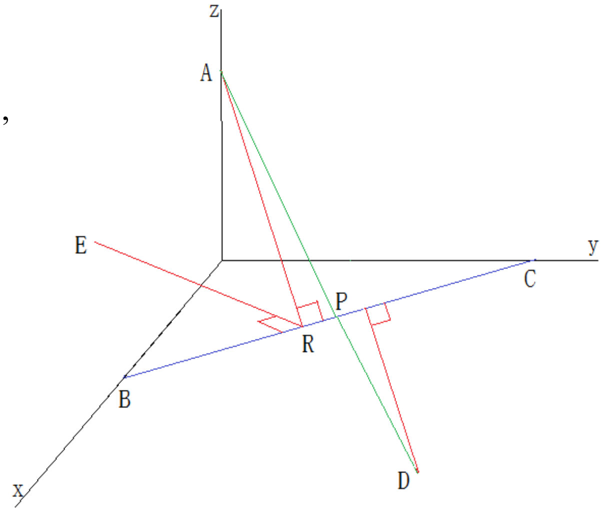
$$\sum_{k=1}^{\infty}x^{k+1}=\frac{x^2}{1-x} \quad ,ただし \quad -1<x<1$$

を微分して

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k=\frac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$$

$x=\dfrac{2}{3}$ を代入して $2\left(\dfrac{2}{3}\right)+3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+4\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\cdots=8$ だから、 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)S_k=\sqrt{6}\times 8=8\sqrt{6}$ (答)

【II】(1)　$P=(1-t)B+tC=(1-t,2t,0)$　(答)



(2)　$R=(1-t,2t,0)$　とし、　$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AR}=0$　より

$$(-1,2,0)\cdot(1-t,2t,-1)=-(1-t)+4t+0=0\ ,$$

$$t=\frac{1}{5}\to R=\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},0\right)\quad (答)$$

$$\overrightarrow{AR}=\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},-1\right)\ ,$$

$$|\overrightarrow{AR}|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2+(-1)^2}=\frac{3}{\sqrt{5}}\quad (答)$$

(3)　$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ER}=0$　より

$$-\left(\frac{4}{5}-p\right)+2\left(\frac{2}{5}-q\right)=0\to p-2q=0$$

長さが等しいことから

$$|\overrightarrow{ER}|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}-p\right)^2+\left(\frac{2}{5}-q\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{5}}\to\left(\frac{4}{5}-p\right)^2+\left(\frac{2}{5}-q\right)^2=\frac{9}{5}$$

2 式を連立して

$$\left(2q-\frac{4}{5}\right)^2+\left(q-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{9}{5}\to 5q^2-4q-1=0\to(5q+1)(q-1)=0$$

q<0 より　$q=-\frac{1}{5},\ p=-\frac{2}{5}\to E=\left(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},0\right)$　(答)

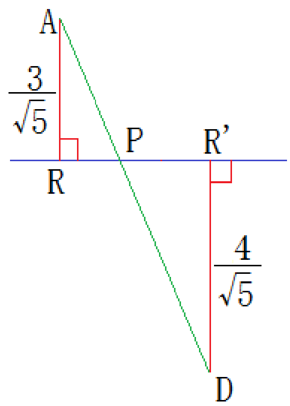
(4) 点 D から線分 BC に下ろした垂線を DR' とし、点 R' の座標を求めよう。

$R'=(1-t,2t,0)$　とし　$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DR'}=0$　より

$$(-1,2,0)\cdot(-t-1,2t-2,0)=(t+1)+2(2t-2)=0\ ,$$

$$t=\frac{3}{5}\to R'=\left(\frac{2}{5},\frac{6}{5},0\right)\ ,$$

$$|\overrightarrow{DR'}|=\sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$



これは、点 A を出発し、直線 BC を経由して点 D にたどり着く場合の最短の経路の問題で、「馬が河で水を飲んでから馬小屋に帰る最短経路」というよくあるパズルだ。右図のように直線 BC で折れ曲がった 2 平面 APR, DPR' をパタンと同一平面上に広げて、2 点 A, D を直線で結べばよい。右図より点 P は線分 RR' を　$\frac{3}{\sqrt{5}}:\frac{4}{\sqrt{5}}=3:4$　に内分する点である。よって

$$P=\frac{4R+3R'}{3+4}=\frac{1}{7}\left(\frac{16}{5}+\frac{6}{5},\frac{8}{5}+\frac{18}{5},0\right)=\left(\frac{22}{35},\frac{26}{35},0\right)\quad (答)$$

距離の和の最小値は

$$AP+PD=\frac{7}{3}AP=\frac{7}{3}\sqrt{\left(\frac{22}{35}\right)^2+\left(\frac{26}{35}\right)^2+1^2}=\frac{7}{3}\times\frac{\sqrt{22^2+26^2+35^2}}{35}=\frac{3\sqrt{265}}{15}=\frac{\sqrt{265}}{5}\quad (答)$$

【III】(1) まず　$S_1=a_1=2$　. 所与の等式から

$$3a_2=2(1-2S_2)+1=3-4S_2=3-4(2+a_2)\to 7a_2=-5\to a_2=-\frac{5}{7}\quad(答)$$

よって　$S_2=a_1+a_2=2-\frac{5}{7}=\frac{9}{7}$　(答)

(2)　$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$　に注意する。与式より

$$3(S_{n+1}-S_n)=S_n(1-2S_{n+1})+1\to(2S_n+3)S_{n+1}=4S_n+1\to S_{n+1}=\frac{4S_n+1}{2S_n+3}$$

したがって　$f(x)=\frac{4x+1}{2x+3}$　(答)

(3) 条件の式から　$\frac{4g(x)+1}{2g(x)+3}=\frac{rx+1}{\beta rx+1}$　. 分母を払って

$$(4g(x)+1)(\beta rx+1)=(2g(x)+3)(rx+1)\quad ,$$

$$(4\cdot\frac{x+1}{\beta x+1}+1)(\beta rx+1)=(2\cdot\frac{x+1}{\beta x+1}+3)(rx+1)\quad .$$

両辺を　$\beta x+1$　倍して

$$((4+\beta)x+5)(\beta rx+1)=((2+3\beta)x+5)(rx+1)\quad .$$

これが x の多項式として恒等的に等しいから　x^2, x の係数がそれぞれ等しい。よって

$$(4+\beta)\beta r=(2+3\beta)r\quad ,$$

$$4+\beta+5\beta r=2+3\beta+5r\to 5\beta r-2\beta-5r+2=0\to(\beta-1)(5r-2)=0$$

となるから　$r=\frac{2}{5},\beta=-2$　(答)

(4) 条件式に左から f を施すと　$f(S_n)=f(g(T_n))=g(\frac{2}{5}T_n)$　. よって　$S_{n+1}=\dfrac{\frac{2}{5}T_n+1}{-\frac{4}{5}T_n+1}$　.

また、条件式のインデックス(添え字) をズラせば　$S_{n+1}=g(T_{n+1})=\frac{T_{n+1}+1}{-2T_{n+1}+1}$

両者を等置して　$\frac{T_{n+1}+1}{-2T_{n+1}+1}=\dfrac{\frac{2}{5}T_n+1}{-\frac{4}{5}T_n+1}$　だが、分母を払って整理すると

$$(-\frac{4}{5}T_n+1)(T_{n+1}+1)=(\frac{2}{5}T_n+1)(-2T_{n+1}+1)\quad ,\quad T_{n+1}=\frac{2}{5}T_n\quad（公比が分かる。）$$

初項は条件式に n=1 を代入して　$g(T_1)=S_1\to\frac{T_1+1}{-2T_1+1}=2\to T_1=\frac{1}{5}$　と分かる。

したがって　$T_n=\frac{1}{5}(\frac{2}{5})^{n-1}$　(答)

(5) 条件式から　$S_n=g(T_n)=\dfrac{\frac{1}{5}(\frac{2}{5})^{n-1}+1}{-\frac{2}{5}(\frac{2}{5})^{n-1}+1}=\dfrac{5^n+2^{n-1}}{5^n-2^n}$　を出しておいて

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{5^n+2^{n-1}}{5^n-2^n}-\frac{5^{n-1}+2^{n-2}}{5^{n-1}-2^{n-1}}=\frac{(5^n+2^{n-1})(5^{n-1}-2^{n-1})-(5^n-2^n)(5^{n-1}+2^{n-2})}{(5^n-2^n)(5^{n-1}-2^{n-1})}$$

$$=\frac{(2^{n-1}5^{n-1}-2^{n-1}5^n)-(2^{n-2}5^n-2^n5^{n-1})}{(5^n-2^n)(5^{n-1}-2^{n-1})}=\frac{2^{n-2}5^{n-1}(2-10-5+4)}{(5^n-2^n)(5^{n-1}-2^{n-1})}=\frac{-9\cdot 2^{n-2}5^{n-1}}{(5^n-2^n)(5^{n-1}-2^{n-1})}$$

$$=\frac{-9\cdot 2^{n-2}}{(5^n-2^n)(1-(\frac{2}{5})^{n-1})}$$

したがって

$$a_n\div T_n=a_n\times\frac{5^n}{2^{n-1}}=\frac{-9\cdot 2^{n-2}}{(5^n-2^n)(1-(\frac{2}{5})^{n-1})}\times\frac{5^n}{2^{n-1}}=\frac{-9}{2(1-(\frac{2}{5})^n)(1-(\frac{2}{5})^{n-1})}\to-\frac{9}{2}\quad(\text{答})$$

【IV】(1)　$y'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^3}=\dfrac{2x^2-1}{2x^3}$　で臨界点は　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	0	…	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	…
y’		−	0	+
y		↘	$\frac{1}{2}(1-\log 2)$	↗

この前後で y' の符号は負から正に変わり極小である。

極小値は　$y(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{-1}{2}\log 2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-\log 2)$　(答)

(2)　$l_p: y-\log p=\frac{1}{p}(x-p)$　(答)

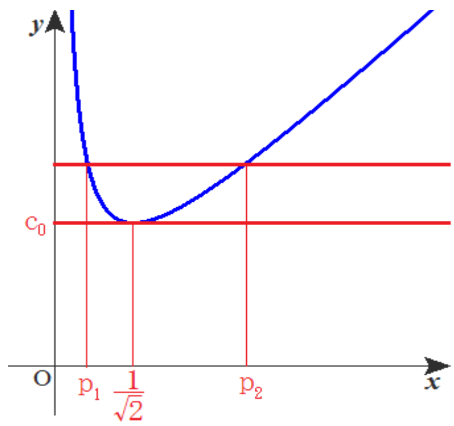
(3) 接線と放物線の式を連立、　$x^2+c_0-\log p=\frac{1}{p}(x-p)$　,

$x^2-\frac{1}{p}x+(c_0+1-\log p)=0$　. 判別式＝0 より

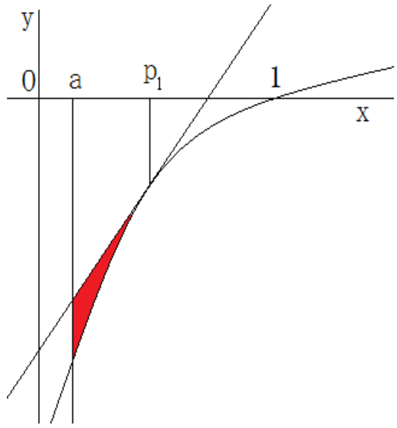
$$D=\frac{1}{p^2}-4(c_0+1-\log p)=0\to c_0=\log p+\frac{1}{4p^2}-1$$

このような c_0 が唯一つ存在するには、c_0+1 が先の関数の最小値に等しければよいから

$$c_0=\frac{1}{2}(1-\log 2)-1=-\frac{1}{2}(1+\log 2)\quad(\text{答})$$



(4)　$p_1<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$　に注意。回転させる図形は x 軸より下方にある。



$$V_1(a)=\pi\int_a^{p_1}\{(\log x)^2-(\frac{1}{p_1}x-1+\log p_1)^2\}dx$$

$$=\pi\int_a^{p_1}\{(\log x)^2-\frac{1}{p_1^2}x^2+\frac{2}{p_1}(1-\log p_1)x-(1-\log p_1)^2\}dx$$

ここで$(\log x)^2$ の積分を求めておくと

$$\int(\log x)^2dx=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx$$

$$=x(\log x)^2-2(x\log x-\int dx)=x\{(\log x)^2-2\log x+2\}+C$$

だから

$$V_1(a)=\pi\left[x(\log x)^2-2x\log x+2x-\frac{1}{3p_1^2}x^3+\frac{1}{p_1}(1-\log p_1)x^2-(1-\log p_1)^2x\right]_a^{p_1}$$

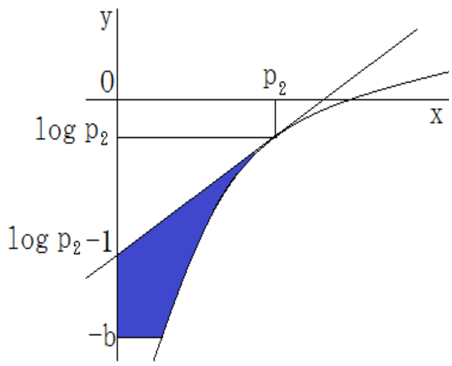
$$=\pi\{p_1(\log p_1)^2-2p_1\log p_1+2p_1-\frac{1}{3}p_1+p_1-p_1\log p_1-p_1+2p_1\log p_1-p_1(\log p_1)^2-A\}$$

ただし

$$A=a(\log a)^2-2a\log a+2a-\frac{1}{3p_1^2}a^3+\frac{1}{p_1}(1-\log p_1)a^2-(1-\log p_1)^2a$$

ここで　$a\to+0$　とすれば　$A\to0$　である。(　$a\log a=-\sqrt{a}\times\sqrt{a(\log a)^2}\to0$　も使った。)よって

$$\alpha=\lim V_1(a)=\pi(\frac{5}{3}p_1-p_1\log p_1)\quad(答)$$



(5) 接線の方程式は　$l_p:y-\log p=\frac{1}{p}(x-p)$　より

$$x=p_2y-p_2\log p_2+p_2$$

に注意する。体積は円錐部分を引けばよい。

$$V_2(b)=\pi\int_{-b}^{\log p_2}(e^y)^2dy-\frac{1}{3}\pi p_2^2$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_{-b}^{\log p_2}-\frac{1}{3}\pi p_2^2=\frac{\pi}{2}(p_2^2-e^{-2b})-\frac{1}{3}\pi p_2^2=\frac{\pi}{6}p_2^2-\frac{\pi}{2}e^{-2b}\to\frac{\pi}{6}p_2^2=\beta$$

$c\to c_0+0$　のとき　$p_1\to\frac{1}{\sqrt{2}},\ p_2\to\frac{1}{\sqrt{2}}$　だから

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\pi(\frac{5}{3}p_1-p_1\log p_1)}{\frac{\pi}{6}p_2^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\log 2)}{\frac{1}{12}}=\sqrt{2}(10+3\log 2)\quad(答)$$