1 Aさんは1が書かれたカードを1枚，2が書かれたカードを2枚，4が書かれたカードを1枚，計4枚を無作為に横一列に並べて4桁の数 X を作る。Bさんは2が書かれたカードを2枚，3が書かれたカードを2枚，計4枚を無作為に横一列に並べて4桁の数 Y を作る。

(1) X が4の倍数となる確率を求めよ。

(2) $X < Y$ となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ kを定数とし，$f(x)=x^3-kx$とおく。曲線$C: y=f(x)$上に原点と異なる点$\mathrm{P}(a,\ f(a))$をとる。点Pを通り曲線Cとちょうど2点を共有する2つの直線のうち，傾きが大きい方をℓ_1，小さい方をℓ_2とする。さらに，Cとℓ_1の共有点のうちPと異なるものをQ_1，Cとℓ_2の共有点のうちPと異なるものをQ_2とする。ℓ_1およびℓ_2の方程式と，Q_1およびQ_2の座標を求めよ。

3 座標平面上に4点 $P_0(2,\ 0)$，$P_1(0,\ 2)$，$Q_0(0,\ 0)$，$Q_1(-1,\ 1)$ がある。正の整数 n に対し，点 P_n，Q_n まで定まったとき，点 P_{n+1}，Q_{n+1} を以下の条件で定める。

四角形 $P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$ と四角形 $P_{n-1}P_nQ_nQ_{n-1}$ は相似であり，かつ辺 P_nQ_n のみを共有する。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) P_2，Q_2 の座標を求めよ。

(2) P_4，P_8 の座標を求めよ。

(3) 正の整数 m に対して，P_{8m} の座標を m の式で表せ。

$\boxed{4}$ t を実数とし，不等式

$$(x^2-2x+y^2)(x^2-3x+y^2) \leqq 0, \quad t \leqq x \leqq t+1$$

の表す xy 平面上の領域を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。

t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{5}$ 四面体 ABCD において，$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$，$\angle ADB = 90°$ が成り立っている。三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle BDC$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\sqrt{AB^2 + CD^2}}{DG}$ の値を求めよ。

6 袋の中に1から5までの整数が書かれたカードが1枚ずつ入っている。その中から1枚取り出して戻すという試行を繰り返す。n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。n 回目に初めて S_n が3の倍数になる確率を p_n とする。

(1) p_2，p_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n \geqq 4$ とする。S_1，S_2，S_3 が3の倍数でなく $a_3 = 5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が3の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ。

$\boxed{7}$ a は0でない定数とする。2つの放物線 $y = x^2$ と $x = \frac{1}{2a}y^2 + \frac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど3本となるような a の範囲を求めよ。

$\boxed{8}$ 複素数平面上で複素数 0，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}+i$ を表す点をそれぞれ A_1，B_0，B_1 とする。正の整数 n に対して，点 A_{n+1} は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点とし，点 B_{n+1} は直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ が三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ と相似になるものとする。点 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が表す複素数を z_n とする。

(1) 複素数 z_3 を求めよ。

(2) 複素数 z_6 を求めよ。

(3) 正の整数 m に対して，複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ。

9 正の整数 n に対して，

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}, \quad d_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k^2$$

とする。

(1) a_n を求めよ。

(2) b_n を求めよ。

(3) c_n を求めよ。

(4) d_n を求めよ。

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n}$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{10}}$ 有理数 a，b に対して，$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば a，b は整数であることを証明せよ。ただし，i は虚数単位である。

$\boxed{11}$ 定義域を $0 \leqq x \leqq 1$ とする関数 $f_n(x)$ と $f(x)$ を以下で定める。

$$f_1(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x (f_n(t) - 1)^2 \, dt \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

(1) 正の整数 n に対して，不等式

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 正の整数 n に対して，不等式

$$(-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) 実数 a $(0 \leqq a \leqq 1)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n(a)$ を求めよ。