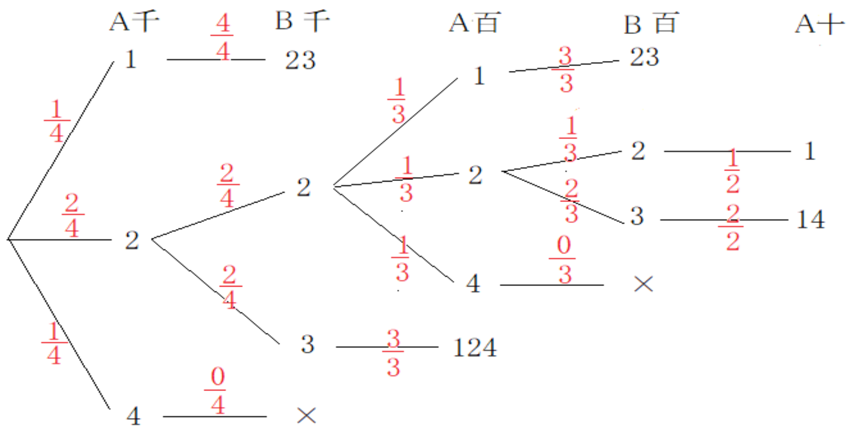
【第 1 問】(1) 100 は 4 で割り切れるから、下 2 桁が 4 の倍数、すなわち 12 か 24 になればよい。
(一の位が 2 で十の位が 1 になる確率) ＋ (一の位が 4 で十の位が 2 になる確率)

$= \dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$ (答)

(2) 二人で闘うゲームと考える。

A が千の位をめくる→
B が千の位をめくる→
A が百の位をめくる→
B が百の位をめくる→
……

というゲームと考える。



X<Y となる場合を上図の樹形図に示した。積と和の法則により、求めるべき確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{72}+\frac{1}{18}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{18+6+1+4+18}{72}=\frac{47}{72} \quad \text{(答)}$$

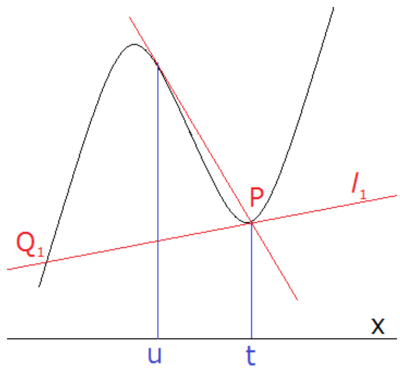
【第2問】3 次関数と 1 次関数のグラフの交点は一般には 3 個だが、連立してできる3次方程式が 2 重解(と単根) を持てば共有点は3個になる。重解(接点の x 座標)を $x=t$ とし、単根の方を $x=t$ としよう。接線の方程式は

$$y-(t^3-kt)=(3t^2-k)(x-t)$$

で、これが点 (u, u^3-ku) を通るから

$$(u^3-ku)-(t^3-kt)=(3t^2-k)(u-t) \quad ,$$

$$(u-t)\{(u^2+ut+t^2)-k-(3t^2-k)\}=0 \quad ,$$



u≠t より

$$2t^2-ut-u^2=0\to(2t+u)(t-u)=0\to u=-2t$$

すなわち交点の x 座標は接点の x 座標の -2 倍である。もし $x=a$ が接点の x 座標なら Q の x 座標は $x=-2a$ で2点を結ぶ直線の傾きは

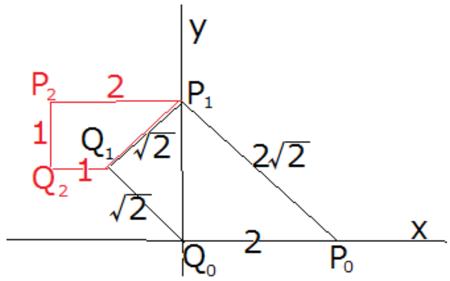
$$\frac{(a^3-ka)-(-8a^3+2ka)}{a-(-2a)}=3a^2-k \quad ,$$

もし $x=a$ が交点の x 座標なら Q の x 座標は $x=-\dfrac{1}{2}a$ で2点を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{(a^3-ka)-(-1/8a^3+1/2ka)}{a-(-1/2a)}=\frac{3}{4}a^2-k \quad ,$$

傾きの大きさを比べて前者が $l_1: y=(3a^2-k)(x-a)+a^3-ka$, $Q_1=(-2a, -8a^3+2ka)$ (答)

後者が $l_2: y=(\dfrac{3}{4}a^2-k)(x-a)+a^3-ka$, $Q_2=(-\dfrac{1}{2}a, -\dfrac{1}{8}a^3+\dfrac{1}{2}ka)$ (答)



【第3問】(1) 前進ベクトル　$\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \cdots$　がどのように変化しているかというと、進む方向は常に左斜め 45°に向きを変え、前進距離が　$\frac{1}{\sqrt{2}}$　倍,　$\frac{1}{\sqrt{2}}$　倍, … になる。だから前進ベクトルを複素数と考えれば、1 回前の前進ベクトルに毎回　$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{1}{4}\pi+i\sin\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$　を掛けたものが新たな前進ベクトルになる。よって

$P_0:2$　,

$P_1:2+2\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi)=2+(-2+2i)=2i$　,

$P_2:2+2\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi)(1+\alpha)=2i+(-2+2i)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)=-2+2i$

Q も同様に考えて

$Q_0:0$　,

$Q_1:0+\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi)=0+(-1+i)=-1+i$　,

$Q_2:0+\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi)(1+\alpha)=(-1+i)+(-1+i)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)=-2+i$

したがって　$P_2=(-2,2), Q_2=(-2,1)$　(答)

(2)　$P_4:2+2\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)$　だから等比数列の和が計算できればよい。

$$S_4=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3=\frac{\alpha^4-1}{\alpha-1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}^4}(\cos\frac{4}{4}\pi+i\sin\frac{4}{4}\pi)-1}{-1/2+1/2i}=\frac{-5/2}{-1+i}$$　より

$P_4:2+(-2+2i)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)=2+(-2+2i)\cdot\frac{-5/2}{-1+i}=2-5=-3$　,　$P_4=(-3,0)$　(答)

$$S_8=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^7=\frac{\alpha^8-1}{\alpha-1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}^8}(\cos\frac{8}{4}\pi+i\sin\frac{8}{4}\pi)-1}{-1/2+1/2i}=\frac{-15/8}{-1+i}$$　より

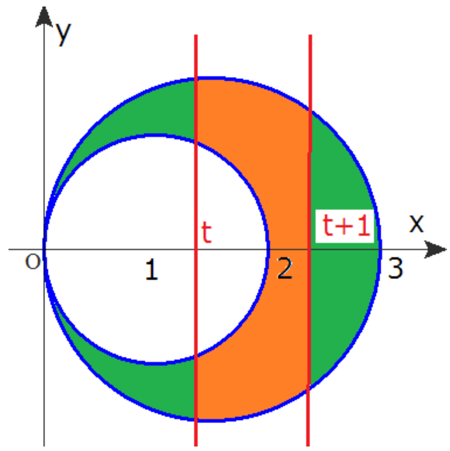
$P_8:2+(-2+2i)(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^7)=2+(-2+2i)\cdot\frac{-15/8}{-1+i}=2-\frac{15}{4}=-\frac{7}{4}$　,　$P_8=(-\frac{7}{4},0)$　(答)

(3)

$$S_{8m}=\frac{\alpha^{8m}-1}{\alpha-1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}^{8m}}(\cos\frac{8m}{4}\pi+i\sin\frac{8m}{4}\pi)-1}{-1/2+1/2i}=\frac{\frac{1}{2^{4m}}-1}{-1/2+1/2i}$$　より

$P_{8m}:2+(-2+2i)S_{8m}=2+4\cdot(\frac{1}{2^{4m}}-1)=\frac{1}{2^{4m-2}}-2$　,　$P_{8m}=(\frac{1}{2^{4m-2}}-2,0)$　(答)

【第 4 問】 $\{(x-1)^2+y^2-1\}\{(x-\frac{3}{2})^2+y^2-\frac{9}{4}\}\leq 0$ と変形。



掛けて負だから

2 円 $C_1:(x-1)^2+y^2=1,\ C_2:(x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{9}{4}$

の「内かつ外」か「外かつ内」だから右図の色を付けた部分である。(実際には「内かつ外」は原点だけ。)

$1\leq t\leq 2$ より $t\leq 2\leq t+1$ だから積分区間は必ず 2 をまたぐ。

$$V(t)=\pi\int_t^{t+1} y_2^2\,dx-\pi\int_t^2 y_1^2\,dx$$
$$=\pi\int_t^2 (y_2^2-y_1^2)\,dx+\pi\int_2^{t+1} y_2^2\,dx$$
$$=\pi\int_t^2 \{(-x^2+3x)-(-x^2+2x)\}\,dx+\pi\int_2^{t+1}(-x^2+3x)\,dx$$
$$=\pi\int_t^2 x\,dx+\pi\int_2^{t+1}(-x^2+3x)\,dx=\pi\{[\frac{1}{2}x^2]_t^2+[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2]_2^{t+1}\}$$
$$=\pi\{\frac{1}{2}(4-t^2)-\frac{1}{3}(t^3+3t^2+3t-7)+\frac{3}{2}(t^2+2t-3)\}$$
$$=-\frac{\pi}{6}(2t^3-12t+1)$$

$V'(t)=-\frac{\pi}{6}(6t^2-12)=\pi(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$ より

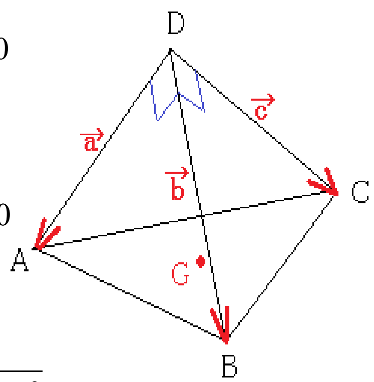
x	1	…	$\sqrt{2}$	…	2
f’		+	0	−	
f		↗	最大	↘	0

増減表は右のようになり、最大値は

$V(\sqrt{2})=\frac{\pi}{6}(8\sqrt{2}-1)$ (答)

【第 5 問】(1) まず直角から $AB^2=AD^2+BD^2$ が分かる。 $AB^2+CD^2=\cdots=k$ とおこう。

余弦定理: $\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ の分子だけ求める。



$BD^2+CD^2-BC^2=BD^2+(k-AB^2)-(k-AD^2)=AD^2+BD^2-AB^2=0$

より△BDC は BC を斜辺とする直角三角形。∠BDC=90°(答)

(2) こうなると ∠ADC も 90°のような気がする。確かめよう。

$AD^2+CD^2-AC^2=AD^2+(k-AB^2)-(k-BD^2)=AD^2+BD^2-AB^2=0$

より△ADC は AC を斜辺とする直角三角形。∠ADC=90°である。

さて $\overrightarrow{DA}=\vec{a},\ \overrightarrow{DB}=\vec{b},\ \overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とおく。

$$AB^2+CD^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})+(-\vec{c})\cdot(-\vec{c})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

ところで∠ADB=90° より $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ となり、 $\sqrt{AB^2+CD^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2}$

一方、重心の方は $\overrightarrow{DG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ より、

$$DG^2=\frac{1}{9}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

ところで∠ADB=∠BDC=∠ADC=90° より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ となり、 $DG=\frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2}$

したがって $\frac{\sqrt{AB^2+CD^2}}{DG}=3$ (答)

【第 6 問】(1)　$p_1=\dfrac{1}{5}$ は明らか。

2 回目で初めてビンゴということは、 $S_1\equiv 0\left(mod.3\right)$ ではない。その確率は $1-p_1=\dfrac{4}{5}$

このように 1 回目で和は $\equiv 1\left(mod.3\right)$ か $\equiv 2\left(mod.3\right)$ になっている。2 回目に出るべきカードは前者なら 2, 5 で後者なら 1,4 で、いずれも 5 枚中の 2 枚が出ればよいからその確率は $\dfrac{2}{5}$ だから

$$p_2=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}\quad\text{(答)}$$

3 回目で初めてビンゴということは、1 回目も 2 回目もビンゴではない。その確率は $1-p_1-p_2$ で、3 回目に出るべきカードは前記同様 5 枚中の 2 枚でその確率は $\dfrac{2}{5}$ だから

$$p_3=\left(1-p_1-p_2\right)\times\frac{2}{5}=\left(1-\frac{1}{5}-\frac{8}{25}\right)\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}\times\frac{2}{5}=\frac{24}{125}\quad\text{(答)}$$

(2)「3 回目で初めてビンゴ」を真似て計算。

$$p_n=\left(1-p_1-p_2-\cdots-p_{n-1}\right)\times\frac{2}{5}\quad\text{(ただし}\ n\geq 2\ \text{)}$$

インデックス(添字) をズラして

$$p_{n+1}=\left(1-p_1-p_2-\cdots-p_{n-1}-p_n\right)\times\frac{2}{5}\quad\text{(ただし}\ n\geq 1\ \text{)}$$

この 2 式を辺々引けば

$$p_{n+1}-p_n=\left(-p_n\right)\times\frac{2}{5}\rightarrow p_{n+1}=\frac{3}{5}p_n\quad\text{(ただし}\ n\geq 2\ \text{)}$$

よってこの数列は $n\geq 2$ において等比数列である。したがって

$$p_1=\frac{1}{5};\ p_n=\frac{8}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}\left(n\geq 2\right)$$

(3) 3 回めくってもビンゴにならず $a_3=5$ になる事象を A とすれば、その確率は $P\left(A\right)$ である。n 回目に初めてビンゴになる事象を B_n とする。まず求めたいのは $P\left(A\cap B_n\right)$ だ。

初めに $P\left(A\cap B_4\right)=P\left(A\right)\times\dfrac{2}{5}$ であり、次は

$$P\left(A\cap B_5\right)=\left\{P\left(A\right)-P\left(A\cap B_4\right)\right\}\times\frac{2}{5}=P\left(A\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{2}{5}=P\left(A\right)\times\frac{6}{25}\quad,$$

$P\left(A\cap B_n\right)=\left\{P\left(A\right)-\cdots-P\left(A\cap B_{n-1}\right)\right\}\times\dfrac{2}{5}$ (ただし $n\geq 5$) が成り立つ。インデックスをズラして

$P\left(A\cap B_{n+1}\right)=\left\{P\left(A\right)-\cdots-P\left(A\cap B_n\right)\right\}\times\dfrac{2}{5}$ これと辺々引いて

$P\left(A\cap B_{n+1}\right)-P\left(A\cap B_n\right)=\left\{-P\left(A\cap B_n\right)\right\}\times\dfrac{2}{5}\rightarrow P\left(A\cap B_{n+1}\right)=\dfrac{3}{5}P\left(A\cap B_n\right)$ であるから、

$P\left(A\cap B_n\right)=P\left(A\right)\times\dfrac{6}{25}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-5}$ だが、この式は $n\geq 5$ だけでなく $n\geq 4$ で成り立つ。

求めるべき条件付き確率は

$$q_n=\frac{P\left(A\cap B_n\right)}{P\left(A\right)}=P\left(A\right)\times\frac{6}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-5}\div P\left(A\right)=\frac{6}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-5}=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-4}\quad\text{(答)}$$

【第7問】目標の直線を　$y=mx+n$　とする。これが2曲線に接するから、連立して重解だ。
前者の放物線と連立、　$x^2-mx-n=0$　の判別式＝0より

$$D_1=m^2+4n=0 \quad \cdots\cdots①$$

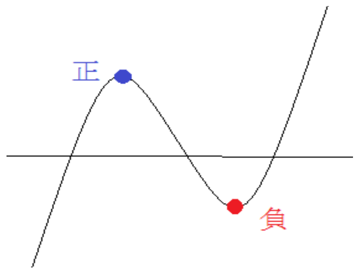
後者の放物線と連立、　$\frac{1}{2a}y^2+\frac{3a}{4}=\frac{y-n}{m} \Leftrightarrow 2my^2-4ay+(3a^2m+4an)=0$　の判別式＝0より

$$\frac{D_2}{4}=4a^2-2m(3a^2m+4an)=0 \quad \cdots\cdots②$$

①、②からnを消去して

$$4a^2-2m(3a^2m-am^2)=0 \Leftrightarrow am^3-3a^2m^2+2a^2=0$$

このmについての3次方程式が3個の異なる実数解を持てば異なる3組の数(m,n)を持つ。
　$f(m)=am^3-3a^2m^2+2a^2$　が3個の異なる零点を持てばよく、
極大値と極小値が異符号であればよい。



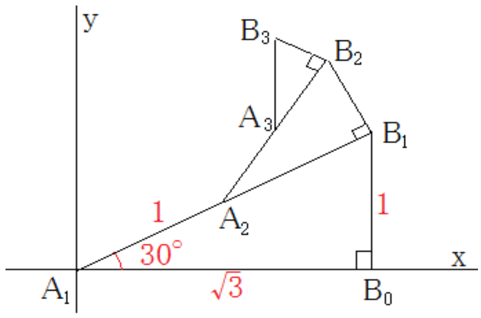
$$f'(m)=3am^2-6a^2m=3am(m-2a)$$

臨界点は　$m=0,2a$　で、極大値×極小値の積＜0より

$$f(0)f(2a)=2a^2(-4a^4+2a^2)=-4a^4(2a^2-1)<0$$

よって　$a<-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}<a$　(答)

【第8問】(1) 前進ベクトル　$\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}, \cdots$　がどのように変化しているかというと、進む方向は常に左斜め30°に向きを変え、前進距離が　$\frac{1}{\sqrt{3}}$　倍, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　倍, ... になる。だから前進ベクトルを複素数と考えれば、1回前の前進ベクトルに毎回　$\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi)$　を掛けたものが新たな前進ベクトルになる。よって



$$z_1=0 \quad ,$$

$$z_2=\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi \quad ,$$

$$z_3=(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi)(1+\alpha)=(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi)\{1+\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi)\}$$

$$=(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi)+\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{2}{6}\pi+i\sin\frac{2}{6}\pi)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{2}{3}\sqrt{3}+i \quad \text{(答)}$$

(2) 同様に考えて

$$z_6=(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi)(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^4)=(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi)\times\frac{\alpha^5-1}{\alpha-1}$$

$$=(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi)\times\{\frac{1}{\sqrt{3^6}}(\cos\frac{6}{6}\pi+i\sin\frac{6}{6}\pi)-1\}\div\{\frac{1}{\sqrt{3}}\{(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi)-1\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+i}{2}\times\{\frac{1}{9\sqrt{3}}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)-1\}\div(\frac{-3+\sqrt{3}i}{6})$$

$$=\frac{\sqrt{3}+i}{2}\times\frac{-19\sqrt{3}+i}{18\sqrt{3}}\times(-\frac{3(\sqrt{3}+i)}{2\sqrt{3}})=\frac{5\sqrt{3}+14i}{9} \quad \text{(答)}$$

(3) 同様に考えて

$$z_{6m}=\left(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi\right)\left(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{6m-2}\right)=\left(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi\right)\times\frac{\alpha^{6m-1}-1}{\alpha-1}$$

となる。前問と異なる部分だけ取り出すと

$$\alpha^{6m-1}-1=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}^{6m-1}}\left(\cos\frac{6m-1}{6}\pi+i\sin\frac{6m-1}{6}\pi\right)-1\right\}\quad(*)$$

だが、もしmが偶数なら

$$(*)=\frac{\sqrt{3}}{3^{3m}}\left(\cos\frac{-1}{6}\pi+i\sin\frac{-1}{6}\pi\right)-1=\frac{\sqrt{3}}{3^{3m}}\times\frac{\sqrt{3}-i}{2}-1=\frac{3-2\cdot3^{3m}-\sqrt{3}i}{2\cdot3^{3m}}$$

だから

$$z_{6m}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}\times\left(-\frac{3\left(\sqrt{3}+i\right)}{2\sqrt{3}}\right)\times\frac{3-2\cdot3^{3m}-\sqrt{3}i}{2\cdot3^{3m}}=-\frac{3\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{3}}\times\frac{3-2\cdot3^{3m}-\sqrt{3}i}{2\cdot3^{3m}}$$

$$=\frac{\left(3^{3m}-3\right)+i\left(\sqrt{3}\cdot3^{3m}-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}\cdot3^{3m-1}}$$

一方、もしmが奇数なら

$$(*)=\frac{\sqrt{3}}{3^{3m}}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)-1=\frac{\sqrt{3}}{3^{3m}}\times\frac{-\sqrt{3}+i}{2}-1=\frac{-3-2\cdot3^{3m}+\sqrt{3}i}{2\cdot3^{3m}}$$

だから

$$z_{6m}=-\frac{3\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{3}}\times\frac{-3-2\cdot3^{3m}+\sqrt{3}i}{2\cdot3^{3m}}=\frac{\left(3^{3m}+3\right)+i\left(\sqrt{3}\cdot3^{3m}+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}\cdot3^{3m-1}}$$

である。したがって

$$\text{実部}=\frac{3^{3m}\mp3}{2\sqrt{3}\cdot3^{3m-1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2\cdot3^{3m-1}}\quad,\text{虚部}=\frac{\sqrt{3}\cdot3^{3m}\mp\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot3^{3m-1}}=\frac{3}{2}\mp\frac{1}{2\cdot3^{3m-1}}\quad(\text{答})$$

ただしmの偶奇に従って複号の上下を採る。

【第９問】(1) 二項定理　$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k$　において x=1 を代入すれば

$$a_n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k=2^n \quad (\text{答})$$

(2) 微分した　$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k k x^{k-1}$　において x=1 を代入すれば

$$b_n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k k=n 2^{n-1} \quad (\text{答})$$

(3) 積分した　$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_nC_k}{k+1} x^{k+1}+C$　において x=0 を代入すれば　$C=\frac{1}{n+1}$　と積分定数が決まる。つぎに x=1 を代入して

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_nC_k}{k+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1} \quad (\text{答})$$

(4) 2 階微分の　$n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum_{k=2}^{n} {}_nC_k k(k-1) x^{k-2}$　において x=1 を代入すれば

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k k(k-1)=\sum_{k=2}^{n} {}_nC_k k(k-1)=n(n-1)2^{n-2}$$

これと(2) の結果を足し合わせればよい。

$$d_n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k k(k-1)+\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k k=n(n-1)2^{n-2}+n 2^{n-1}=(n^2+n)2^{n-2} \quad (\text{答})$$

(5)　$\frac{a_n b_n}{c_n d_n}=2^n \cdot n2^{n-1}/\{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\cdot(n^2+n)2^{n-2}\}=\frac{n(n+1)2^{2n-1}}{(2^{n+1}-1)(n^2+n)2^{n-2}}=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$　より

$$\lim \frac{a_n b_n}{c_n d_n}=\frac{1}{1-0}=1 \quad (\text{答})$$

【第10問】両有理数を既約分数と考えて $a=\dfrac{c}{d}, b=\dfrac{e}{f}$ とおく。ここで c,d,e,f は整数で、 c,d および e,f はいずれも互いに素、すなわち共通の素因数を持たない。
さて2乗の実部と虚部が整数、すなわち

$$a^2-b^2=\frac{c^2}{d^2}-\frac{e^2}{f^2}=\frac{c^2f^2-d^2e^2}{d^2f^2}\quad,\quad 2ab=\frac{2ce}{df}$$ がともに整数

である。前者を見れば、分子の $c^2f^2-d^2e^2$ が d^2 で割り切れる($d^2|c^2f^2-d^2e^2$ と表す)ことが分かる。よって $d^2|c^2f^2$ だが、 c,d が互いに素だったから $d^2|f^2\to d|f$ 同様に考えて $f|d$ となり、 $d=\pm f$ である。($d=kf=k(k'd)\to kk'=1\to k=\pm1$ だから。)
結局、虚部の $\dfrac{2ce}{\pm d^2}$ が整数になる。 c,d が互いに素だったから $d^2|2e$ である。もしここで $d=\pm f$ が2という素因子を持てば $4|2e\to 2|e$ だが、これは e,f が互いに素であることに反する。 $d=\pm f$ が2で割り切れることになったから $d^2|e$ すなわち $f^2|e$ だが、 e,f が互いに素だから $f=\pm1$ これは b が整数であることを意味する。同様に、虚部の $\dfrac{2ce}{\pm f^2}$ が整数であることからら $d=\pm1$, a が整数であることが出てくる。■

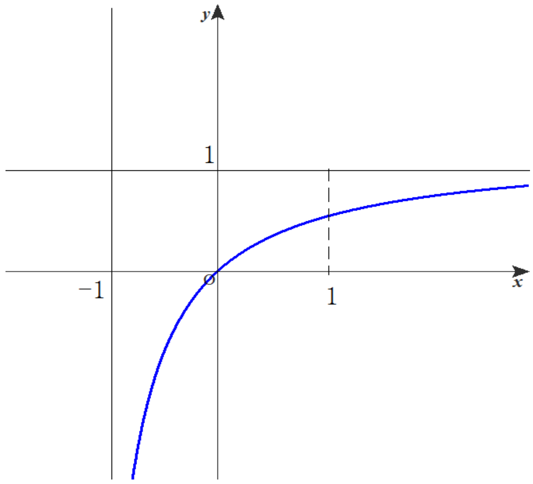
【第11問】(1) 数学的帰納法による。n=1 のときはよし。n のとき成り立つと仮定する。
$f_n(t)\le1\to1-f_n(t)\ge0$ と $0\le f_n(t)\to-f_n(t)\le0\to1-f_n(t)\le1$ から

$$0\le1-f_n(t)\le1\quad,\quad 0\le(f_n(t)-1)^2\le1$$

t を $0\le t\le x(\le1)$ の範囲で動かして積分すれば

$$0=\int_0^x 0\,dt\le\int_0^x(f_n(t)-1)^2dt\le\int_0^x 1\,dx=x\le1$$

だから n+1 のときにも成り立つことが分かる。



(2) 数学的帰納法。n=1 のときは

$$0=-f_1(x)\ge-\frac{x}{x+1}$$

が成り立てばよいのだが、 $y=\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$ の

グラフは右のようになるので

$$0\le\frac{x}{x+1}\le\frac{1}{2}$$

となって OK だ。
n のとき成り立つと仮定する。n を偶数としよう。仮定により $f_n(x)\ge\dfrac{x}{x+1}$ だから

$$0\le1-f_n(x)\le1-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1}\quad,$$

$$f_{n+1}(x)=\int_0^x(f_n(t)-1)^2dt\le\int_0^x\left(\frac{1}{t+1}\right)^2dt=\left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^x=\frac{x}{x+1}\quad,$$

$$(-1)^{n+1}f_{n+1}(x)\ge(-1)^{n+1}\frac{x}{x+1}$$

n が奇数の場合は仮定より $f_n(x) \le \frac{x}{x+1}$ だから

$$1 \ge 1 - f_n(x) \ge 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \ge 0 \quad ,$$

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x (f_n(t)-1)^2 dt \ge \int_0^x \left(\frac{1}{t+1}\right)^2 dt = \frac{x}{x+1} \quad ,$$

$$(-1)^{n+1} f_{n+1}(x) \ge (-1)^{n+1} \frac{x}{x+1}$$

これで n+1 のときにも成り立つことが示せた。■

(3) 前問を解かされたのだから $\lim f_n(a) = f(a) = \frac{a}{a+1}$ であるだろうと予想が立つ。

それを証明するために任意の正の整数 n について

$$|f_n(a) - f(a)| \le \frac{a^{n-1}}{a+1} \quad (*)$$

が成り立つことを示そう。n=1 のときは $|f_1(a) - f(a)| = \frac{a}{a+1} \le \frac{1}{a+1}$ だからたしかに成り立つ。

n の場合の (*) を仮定する。これから行う積分の範囲は $0 \le t \le a$ だから $\epsilon = a^{n-2}$ とおけば、

$$\left| f_n(t) - \frac{t}{t+1} \right| \le \frac{t^{n-1}}{t+1} = \frac{t^{n-2} \times t}{t+1} \le \frac{\epsilon t}{t+1}$$

が $0 \le t \le a$ において成り立つ。

n が偶数(奇数)のとき

$$0 \le f_n(t) - 1 + \frac{1}{t+1} \le \frac{\epsilon t}{t+1} \qquad \left(0 \le -\{f_n(t) - 1 + \frac{1}{t+1}\} \le \frac{\epsilon t}{t+1} \right),$$

$$\frac{-1}{t+1} \le f_n(t) - 1 \le \frac{\epsilon t - 1}{t+1} \le 0 \qquad \left(0 \ge \frac{-1}{t+1} \ge f_n(t) - 1 \ge -\frac{\epsilon t + 1}{t+1} \right),$$

$$\frac{1}{(t+1)^2} \ge (f_n(t)-1)^2 \ge \left(\frac{\epsilon t - 1}{t+1}\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{(t+1)^2} \le (f_n(t)-1)^2 \le \left(\frac{\epsilon t + 1}{t+1}\right)^2 \right),$$

$$0 \ge (f_n(t)-1)^2 - \frac{1}{(t+1)^2} \ge \frac{\epsilon^2 t^2 - 2\epsilon t}{(t+1)^2} \qquad \left(0 \le (f_n(t)-1)^2 - \frac{1}{(t+1)^2} \le \frac{\epsilon^2 t^2 + 2\epsilon t}{(t+1)^2} \right),$$

これを積分すると

$$0 \ge \int_0^a \{(f_n(t)-1)^2 - \frac{1}{(t+1)^2}\} dt \ge -\int_0^a \frac{2\epsilon t - \epsilon^2 t^2}{(t+1)^2} dt$$

$$\left(0 \le \int_0^a \{(f_n(t)-1)^2 - \frac{1}{(t+1)^2}\} dt \le \int_0^a \frac{2\epsilon t + \epsilon^2 t^2}{(t+1)^2} dt \right),$$

真ん中の辺は $= f_{n+1}(a) + \left[\frac{1}{t+1}\right]_0^a = f_{n+1}(a) - \frac{a}{a+1}$ だから $\left| f_{n+1}(a) - \frac{a}{a+1} \right| \le \int_0^a \frac{2\epsilon t + \epsilon^2 t^2}{(t+1)^2} dt$

となるが、最右辺は

$$\int_0^a \frac{2\epsilon t - \epsilon^2 t^2}{(t+1)^2} dt \le \int_0^a \frac{2\epsilon t + \epsilon t^2}{(t+1)^2} dt \le \epsilon \int_0^a \{1 - \frac{1}{(t+1)^2}\} dt = \epsilon \left[t + \frac{1}{t+1}\right]_0^a = \frac{\epsilon a^2}{a+1}$$

$$\left(\int_0^a \frac{2\epsilon t + \epsilon^2 t^2}{(t+1)^2} dt \le \int_0^a \frac{2\epsilon t + \epsilon t^2}{(t+1)^2} dt \le \epsilon \int_0^a \{1 - \frac{1}{(t+1)^2}\} dt = \epsilon \left[t + \frac{1}{t+1}\right]_0^a = \frac{\epsilon a^2}{a+1} \right),$$

したがって $\left| f_{n+1}(a) - \frac{a}{a+1} \right| \le \frac{\epsilon a^2}{a+1} = \frac{a^n}{a+1}$ で、n+1 のときにも成立。■

(*) が証明できたところで $n \to \infty$ とすれば $a \ne 1$ のとき

$\left|f_n(a)-f(a)\right|\to 0$ 、すなわち $\lim_{n\to\infty} f_n(a)=f(a)=\dfrac{a}{a+1}$ (答)

残された問題は $a=1$ のときだ。 $\lim_{n\to\infty} f_n(1)=f(1)=\dfrac{1}{2}$ を示そう。

任意の正数を ϵ とする。関数 $f_n(x)$ は微分可能だから連続、よって a<1 を 1 に限りなく近づければ $\left|f_n(a)-f_n(1)\right|\le\dfrac{\epsilon}{3}$. また $\lim_{n\to\infty} f_n(a)=\dfrac{a}{a+1}$ だから n を限りなく大きくすれば $\left|f_n(a)-\dfrac{a}{a+1}\right|\le\dfrac{\epsilon}{3}$. さらに a の関数 $\dfrac{a}{a+1}$ は連続だから a が 1 に限りなく近づけば $\left|\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{1}{2}\right|\le\dfrac{\epsilon}{3}$ である。したがって

$$\left|f_n(1)-\frac{1}{2}\right|=\left|f_n(1)-f_n(a)+f_n(a)-\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a+1}-\frac{1}{2}\right|$$

$$\le\left|f_n(1)-f_n(a)\right|+\left|f_n(a)-\frac{a}{a+1}\right|+\left|\frac{a}{a+1}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon\ .$$

ϵ は任意だったから $\epsilon\to+0$ とすれば $\lim\left|f_n(1)-\dfrac{1}{2}\right|=0\Leftrightarrow\lim f_n(1)=\dfrac{1}{2}$ ■