(1) (i) 1回目～5回目は1以外、6回目が1だから

$$P=\left(\frac{5}{6}\right)^5\times\frac{1}{6}=\frac{3125}{46656}$$ (答)

(ii) ア) n が偶数なら $(2k)^2=4k^2$ で余り＝0

イ) n が奇数なら $(2k+1)^2=4(k^2+k)+1$ で余り＝1 (答)

(iii) $a_{n+2}=3a_{n+1}+2n-2$, $a_{n+1}=3a_n+2n-4$ を辺々引けば

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2$$

ここで階差を $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおけば $b_{n+1}=3b_n+2\to b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

$b_1=a_2-a_1=1-1=0$ だから、 $b_n=(0+1)\cdot 3^{n-1}-1=3^{n-1}-1$

階差数列が $a_{n+1}-a_n=3^{n-1}-1$ であると分かったので、もとの数列は

$$a_n-a_1=(3^{n-2}+3^{n-3}+\cdots+3^0)-(n-1)=\frac{3^{n-1}-1}{3-1}-(n-1)\ ,$$

$$a_n=a_1+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}-(n-1)=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}-n+\frac{3}{2}$$ (答)

(2) (i) $x=0.111\cdots$ と $10x=1.111\cdots$ を辺々引いて $9x=1\to x=\frac{1}{9}$ (答)

(ii) $x=0.171717\cdots$ と $100x=17.171717\cdots$ を辺々引いて $99x=17\to x=\frac{17}{99}$ (答)

(iii) $x=5.333\cdots$ と $10x=53.333\cdots$ を辺々引いて $9x=48\to x=\frac{48}{9}=\frac{16}{3}$

$$x=3+2+\frac{1}{3}=12.1_{(3)}$$ (答)

(iv) $0.8=\frac{4}{5}=\frac{12}{15}=\frac{12}{16-1}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots\right\}$

これを2進小数で表すと

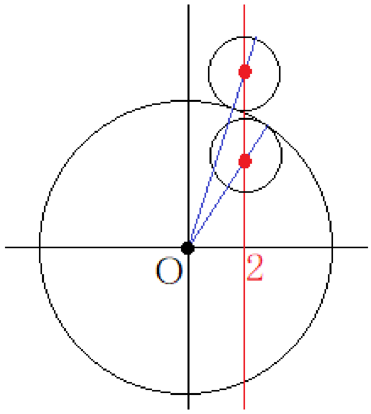
$$=0.11\times(1+0.0001+0.00000001+\cdots)=0.11\times 1.000100010001\cdots$$

$$=0.110011001100110011\cdots=0.\dot{1}10\dot{0}_{(2)}$$ (答)

(3) (i) 点(8,6) から原点までの距離が $\sqrt{8^2+6^2}=10$ だから 7 を引いて半径は 3. 求める円は
$(x-8)^2+(y-6)^2=9$ (答)

(ii) $(x-2)^2-4+(y+2k)^2-4k^2+4k^2-5=0 \to (x-2)^2+(y+2k)^2=9$ は中心 $(2,-2k)$ で、半径 3 の円だから、原点と点 $(2,-2k)$ との間の距離が $7-3=4$ より近いか、 $7+3=10$ より遠いかである。よって

$$2^2+(-2k)^2<16, 2^2+(-2k)^2>100 \ ,$$
$$k^2-3<0, k^2-24>0$$
$$k<-2\sqrt{6}, -\sqrt{3}<k<\sqrt{3}, 2\sqrt{6}<k \quad (答)$$



(iii) 連立方程式を解く。辺々引いて

$$18x-6y-114=0 \to 3x-y-19=0$$

これは 2 円の 2 交点を通る直線 AB の方程式である。前者の円の中心 O から直線 AB に下した垂線の方程式は

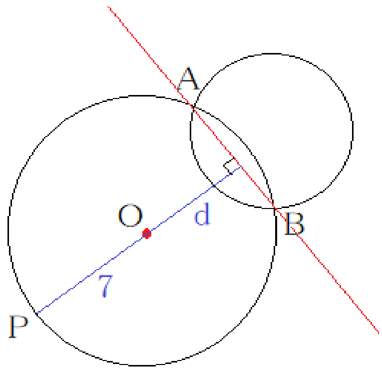
$$x+3y=0$$

である。これと前者の円との交点は、連立して

$$9y^2+y^2=49 \to (x, y)=\pm\left(\frac{21}{\sqrt{10}}, -\frac{7}{\sqrt{10}}\right)$$

面積が最大になるのは第 2 象限にある方で、

$$P=\left(-\frac{21}{\sqrt{10}}, \frac{7}{\sqrt{10}}\right) \quad (答)$$



(4) (i) $(5,-2)=k(1,-3)+l(3,-1)$ より

$k+3l=5, -3k-l=-2 \to (k,l)=(\frac{1}{8},\frac{13}{8})$

よって $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{13}{8}\overrightarrow{OB}$ (答)

(ii) $\overrightarrow{AB}=B-A=(2,-1-p), \overrightarrow{BC}=C-B=(q-3,-1)$ が垂直だから

$2(q-3)+(1+p)=0$ ①

$\overrightarrow{OA}=(1,p), \overrightarrow{BC}$ が平行だから

$1:q-3=p:-1 \to p(q-3)=-1$ ②

①, ②を連立して $(p+2)(p-1)=0 \to (p,q)=(-2,\frac{7}{2}),(1,2)$ (答)

(iii) 等式から $\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{5}\sqrt{1^2+p^2} \to p^2+1=2 \to p=\pm 1$.

また内積から $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=\sqrt{4+(1+p)^2}\sqrt{q^2+4}\cos 30^\circ=2q+2(1+p)$ だから、

ア) $p=1$ なら第 2 の式から

$\sqrt{8}\sqrt{q^2+4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2(q+2)$ (*)

両辺を 2 乗して

$6(q^2+4)=4(q+2)^2 \Rightarrow q^2-8q+4=0 \to q=4\pm 2\sqrt{3}$

2 乗したことによって同値関係が崩れる可能性があるが、2 つの q の値を (*) に入れても両方大丈夫。

イ) $p=-1$ なら第 2 の式から

$2\sqrt{q^2+4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2q$ (**)

両辺を 2 乗して

$3(q^2+4)=4q^2 \Rightarrow q^2-12=0 \to q=\pm 2\sqrt{3}$

2 乗したことによって同値関係が崩れる可能性があって、実際 2 つの q のうち $q=2\sqrt{3}$ のみが答になる。

したがって $(p,q)=(1,4\pm 2\sqrt{3}),(-1,2\sqrt{3})$ (答)

(5) (i)　$g(x)-f(x)=\dfrac{\cos(\pi-x)}{\sin x}-\sin x\cos(\pi-x)=\dfrac{1-\sin^2 x}{\sin x}\cdot\cos(\pi-x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\cdot\cos(\pi-x)\geq 0$

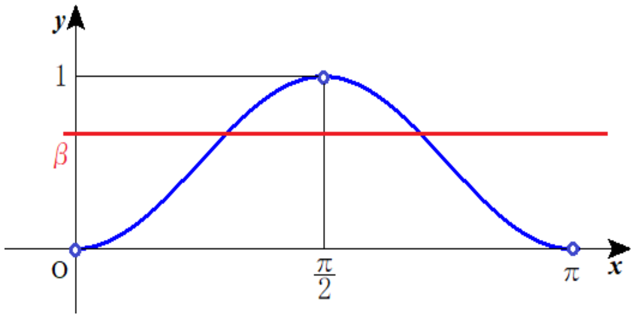
いま　$0<\pi-x<\pi$　の範囲で考えるのだから

$\cos(\pi-x)\geq 0 \Leftrightarrow 0<\pi-x\leq\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}\leq x<\pi$　(答)

(ii)　$\sin x\cos(\pi-x)=-\sin x\cos x=-\dfrac{1}{2}\sin 2x,\ 0<2x<2\pi$　だから、　$-\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{2}$　(答)

(iii)　$g(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin(x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)}$　より　$\cos x\cos(x-\alpha)+\sin x\sin(x-\alpha)=0$　だから、加法定理より　$\cos(x-(x-\alpha))=\cos\alpha=0$　となり、　$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　(答)

(iv)　$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\beta \Leftrightarrow \sin^2 x=\beta$　だから、関数　$h(x)=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$　のグラフを描こう。



このグラフと横線　$y=\beta$　との交点が3個あればよい。一見、交点2個はあるけど3個はないように見える。　$g(x)$　で割ったので　$x=\dfrac{\pi}{2}$　が特別扱いになる。　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$　だから　$x=\dfrac{\pi}{2}$　は必ず　$f(x)=\beta g(x)$　の1つの解になる。この点を除いて2点で交わればよいのだから、　$0<\beta<1$　(答)

(6) (i) $\int \log(x+1)\,dx=(x+1)\log(x+1)-\int dx=(x+1)\log(x+1)-x+C$ だから

$[(x+1)\log(x+1)-x-a\,x]_0^1=2\log 2-1-a=a \to a=\log 2-\dfrac{1}{2}$ (答)

(ii) $\int_0^1 g(t)\,dt=k$ とおく。 $g(x)=\log(x+1)+\dfrac{k}{x+1}$ を積分すると

$\int_0^1 g(t)\,dt=[(x+1)\log(x+1)-x+k\log(x+1)]_0^1=2\log 2-1+k\log 2=k$

よって $k=\dfrac{2\log 2-1}{1-\log 2}$, $g(x)=\log(x+1)+\dfrac{2\log 2-1}{1-\log 2}\cdot\dfrac{1}{x+1}$ である。したがって

$g(0)=\dfrac{2\log 2-1}{1-\log 2}$ (答)

(iii) ① $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\int_0^x h(t)\,dt+\dfrac{1}{x+1}h(x)$ に与式を代入すると

$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\int_0^x h(t)\,dt+\dfrac{\log(x+1)}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\int_0^x h(t)\,dt$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{\log(x+1)}{x+1}$ (答)

② 与式より $h(0)=0$ に注意する。前問の答を積分して

$h(x)=h(0)+\int_0^x h(t)\,dt=0+\left[\log(t+1)+\dfrac{1}{2}(\log(t+1))^2\right]_0^x=\log(x+1)+\dfrac{1}{2}(\log(x+1))^2$ (答)

(7) (i) 和が 2 で割り切れる確率は、

偶偶偶 が $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$, 偶奇奇 が ${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$ より、 $p=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$.

この条件の下で少なくとも 1 つが奇数は「偶奇奇」のことであるから、その条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}}=\frac{3}{4} \quad (答)$$

(ii) ア) 4 の目が 1 回以上出る＝(1 回も出ない)の余事象

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$$

イ) 4 の目は出ないが 2 か 6 が 2 回以上出る

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3+{}_3C_1\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{6}\right)=\frac{8}{216}+\frac{36}{216}=\frac{44}{216}$$

よって、求めるべき確率は $\frac{91}{216}+\frac{44}{216}=\frac{135}{216}=\frac{5}{8}$ (答)

(iii) $x_2+x_3+x_4\geq 3$ だから $x_1^{2(x_2+x_3+x_4)}\geq x_1^6$ に注意する。

ア) $x_1=1$ のとき $x_1^{2(x_2+x_3+x_4)}=1$ で、 x_2, x_3, x_4 は何でもよく、 x_5, x_6, x_7 はすべて 1 だから、

$$\frac{1}{6}\times 1^3\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{1296}$$

イ) $x_1=2$ のとき $x_1^{2(x_2+x_3+x_4)}\geq 2^6$ (2 の 6 以上のベキ)で、 x_2, x_3, x_4 は何でもよく、 x_5, x_6, x_7 はすべて 1, 2, 4 のどれかだから、

$$\frac{1}{6}\times 1^3\times\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{27}{1296}$$

ウ) $x_1=3$ のとき $x_1^{2(x_2+x_3+x_4)}\geq 3^6$ (3 の 6 以上のベキ)で、 x_2, x_3, x_4 は何でもよく、 x_5, x_6, x_7 は 1, 3 のどちらかだから、

$$\frac{1}{6}\times 1^3\times\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{8}{1296}$$

エ) $x_1=4$ のとき $x_1^{2(x_2+x_3+x_4)}\geq 2^{12}$ で、 x_2, x_3, x_4 は何でもよく、 x_5, x_6, x_7 は 1, 2, 4 のどれかだから、

$$\frac{1}{6}\times 1^3\times\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{27}{1296}$$

オ) $x_1=5$ のとき $x_1^{2(x_2+x_3+x_4)}\geq 5^6$ で、 x_2, x_3, x_4 は何でもよく、 x_5, x_6, x_7 は 1, 5 のどちらかだから、

$$\frac{1}{6}\times 1^3\times\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{8}{1296}$$

カ) $x_1=6$ のとき $x_1^{2(x_2+x_3+x_4)}\geq 2^6\times 3^6$ だから x_2, x_3, x_4 は何でもよく、 x_5, x_6, x_7 は 5 以外であればよく、

$$\frac{1}{6}\times 1^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{1296}$$

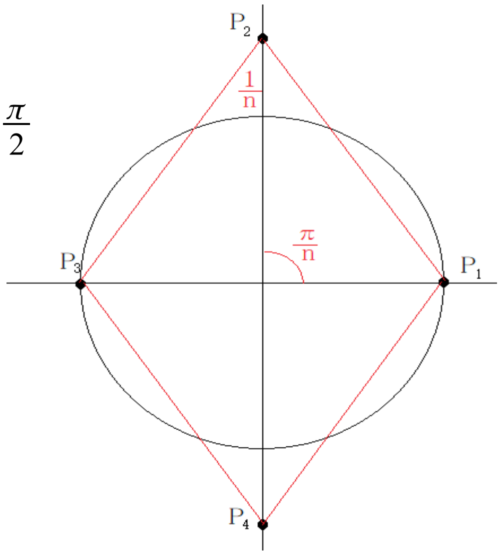
したがって求めるべき確率は $\frac{1+27+8+27+8+125}{1296}=\frac{196}{1296}=\frac{49}{324}$ (答)

(8) (i) n=2 のときは

$$OP_1=1, OP_2=1+\frac{1}{2}, OP_3=1, OP_4=1+\frac{1}{2}$$

$$\angle P_1OP_2=\frac{\pi}{2}, \angle P_2OP_3=\frac{\pi}{2}, \angle P_3OP_4=\frac{\pi}{2}, \angle P_4OP_1=\frac{\pi}{2}$$

だから右図のようになる。



$$L_2=2n\times\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$=4\times\sqrt{1+\frac{9}{4}-3\times 0}=4\times\sqrt{\frac{13}{4}}=2\sqrt{13} \quad \text{(答)}$$

$$S_2=2n\times\frac{1}{2}\cdot 1\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}$$

$$=4\times\frac{3}{4}\times 1=3 \quad \text{(答)}$$

(ii) $S_n=2n\times\frac{1}{2}\cdot 1\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}=(n+1)\sin\frac{\pi}{n}=\frac{(n+1)\pi}{n}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$ だから

$$\lim_{n\to\infty} S_n=1\times\pi\times 1=\pi \quad ■$$

(iii) $L_n=2n\times\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}=2n\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{2(n+1)}{n}\cos\frac{\pi}{n}}$

$$=2\sqrt{2n^2+2n+1-2n(n+1)\cos\frac{\pi}{n}}$$

$\sqrt{\ }$ の中の極限を調べると

$$2n^2+2n+1-2n(n+1)\cos\frac{\pi}{n}=2n^2+2n+1-2n(n+1)\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}$$

$$=1+2\pi^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\left(\sin\frac{\pi}{n}/\frac{\pi}{n}\right)^2}{1+\cos\frac{\pi}{n}}\to 1+2\pi^2\times 1\times\frac{1^2}{1+1}=1+\pi^2$$

よって $\lim L_n=2\sqrt{1+\pi^2}$ (答)

(9) (i) $\frac{20}{27}=\frac{2\times 9+2}{27}=2\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{9}+2\times\frac{1}{27}=0.202_{(3)}$ (答)

(ii) $0.0110\times(1+0.0001+0.0001^2+\cdots)=(\frac{1}{9}+\frac{1}{27})\{1+(\frac{1}{3})^4+\cdots\}=\frac{4}{27}\times\frac{1}{1-\frac{1}{81}}=\frac{4}{27}\times\frac{81}{80}=\frac{3}{20}$

$(m,n)=(20,3)$ (答)

(iii) $\frac{1}{3^n}=0.000\cdots01_{(3)}$ は三進法で小数第 n 位に初めて 1 が現れる数である。この数で小数点と 1 の間を 1 サイクルとして作った循環小数は $x=0.\dot{0}00\cdots0\dot{1}$. これを n 桁ずらすと

$3^n x=1.\dot{0}00\cdots0\dot{1}$

これら辺々引いて $(3^n-1)x=1\to x=\frac{1}{3^n-1}$. よって

$\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^n}=0.\dot{0}00\cdots0\dot{1}-0.000\cdots01$

で、小数第 n 位の 1 個目の 1 は消えて、小数第 2 n 位の 2 個目の 1 が生き残る。<u>第 2 n 位</u>。(答)

(iv) $3^6=729\to 3^6-1=728=7\times 104$ だから 7 を法にして考えると $3^6\equiv 1(mod.7)$. よって

$3^{2020}=3^{6\times 336+4}=(3^6)^{336}\times 3^4\equiv 1^{336}\times 81\equiv 4(mod.7)$

7 で割って 4 余るから帯分数にすると $\frac{3^{2020}}{7}=\square+\frac{4}{7}$ の形になる。すなわち小数部分は $\frac{4}{7}$.

$\frac{4}{7}=\frac{4\times 104}{7\times 104}=\frac{416}{3^6-1}=\frac{416}{3^6}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3^6}}=\frac{3^5+2\times 3^4+3^2+2}{3^6}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3^6}}$

$=(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{0}{3^5}+\frac{2}{3^6})\times(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{3^{12}}+\cdots)$

$=0.120102\times(1+0.000001+0.000000000001+\cdots)$

$=0.120102,120102,120102,\cdots=0.\dot{1}2010\dot{2}_{(3)}$ (答)