【第１問】[1](1) 円の式は　$(x-3)^2+(y-1)^2=1$　より　$x^2+y^2-6x-2y+9=0$

(2) 直線の式　$y=ax$　を円の式に代入して　$x^2+a^2x^2-6x-2ax+9=0$　整理して

$$(1+a^2)x^2-2(3+a)x+9=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

これの判別式が 0 になればよいから　$D/4=(3+a)^2-9(1+a^2)=0 \Rightarrow 8a^2-6a=0$

$$2a(4a-3)=0 \Rightarrow a=0, \frac{3}{4}$$

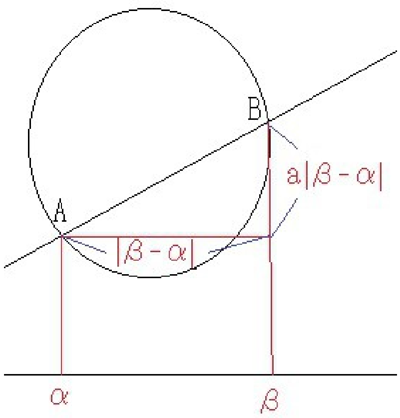
後者の場合、その値を (*) に代入すれば

$$\frac{25}{16}x^2-\frac{30}{4}x+9=0 \quad \text{すなわち} \quad (5x-12)^2=0$$

だから　$x=\frac{12}{5}, y=\frac{3}{4}\times\frac{12}{5}=\frac{9}{5}$　が接点である。この点における法線は

$$y-\frac{9}{5}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{12}{5}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{-4}{3}x+5$$

(3)



2次方程式 (*) の2つの実数解を　$x=\alpha, \beta$　とすれば、弦 AB の長さは

$$AB=\sqrt{(|\beta-\alpha|)^2+(a|\beta-\alpha|)^2}=\sqrt{1+a^2}|\beta-\alpha|$$

あとは解と係数の関係から　$\alpha+\beta=\frac{2(a+3)}{1+a^2}, \alpha\beta=\frac{9}{1+a^2}$　だから

$$|\beta-\alpha|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\frac{4(a+3)^2}{(1+a^2)^2}-\frac{36}{1+a^2}}=\frac{\sqrt{-32a^2+24a}}{1+a^2}=\frac{2\sqrt{6a-8a^2}}{1+a^2}$$

よって弦長は

$$AB=\frac{2\sqrt{6a-8a^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

弦長が 2 になるのは

$$\frac{2\sqrt{6a-8a^2}}{\sqrt{1+a^2}}=2 \Rightarrow 6a-8a^2=1+a^2 \Rightarrow 9a^2-6a+1=0 \Rightarrow (3a-1)^2=0 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

[2](1)　$2^0=1, 2^2=1$　だから　$\log_2 1=0, \log_2 2=1$　である。　$\log_2 x$　が整数だと　x　は 2 の整数乗だから、それを　$1 \leqslant x \leqslant 100$　の範囲で探すと

$$x=2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^6=64$$

の 7 個である。

(2)　$r=\log_2 3$　ならば　$\log_2 54=\log_2(3^3\times 2)=3\log_2 3+\log_2 2=3r+1$

また $\dfrac{r+3}{2}=\dfrac{1}{2}(\log_2 3+\log_2 8)=\dfrac{1}{2}\log_2 24=\log_2\sqrt{24}$ で、一方 $\log_2 5=\log_2\sqrt{25}>\log_2\sqrt{24}$ より

$$\log_2 5>\frac{r+3}{2}$$

であり、 $\log_{1/2}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\log_2 1/\sqrt{3}}{\log_2 1/2}=\dfrac{-\frac{1}{2}\log_2 3}{-1}=\dfrac{1}{2}r<r$ ($r>0$ だから。)である。

(3) $\log_k 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 k}=\dfrac{1}{\log_2 k}$ だが、ここで $k\geqslant 3$ とすると $\log_2 k>\log_2 2=1\Rightarrow\dfrac{1}{\log_2 k}<1$ つまり

$0\leqslant\dfrac{1}{\log_2 k}<0+1$ よって求める整数 n は $n=0$ である。

$\dfrac{m}{10}\leqslant\log_k 2=\dfrac{1}{\log_2 k}$ を書き直すと $\log_2 k\leqslant\dfrac{10}{m}$ であり、これをさらに書き直すと

$$k\leqslant 2^{10/m} \quad すなわち \quad k^m\leqslant 2^{10}$$

対偶をとれば、 $\dfrac{m}{10}>\log_k 2$ と $k^m>2^{10}$ は同値である。

そこで $\log_7 2\,(k=7)$ を調べよう。7 のベキは $7^2=49, 7^3=343, 7^4=2401$ だから

$$7^3=343<2^{10}=1024<7^4=2401$$

前者の不等式: $7^3\leqslant 2^{10}$ から $\dfrac{3}{10}\leqslant\log_7 2$ であり、後者の不等式: $7^4>2^{10}$ から $\dfrac{4}{10}>\log_7 2$ である。まとめると $\dfrac{3}{10}\leqslant\log_7 2<\dfrac{4}{10}$ だから小数第 1 位は 3 である。

反対に小数第 1 位は 2 だと $\dfrac{2}{10}\leqslant\log_k 2<\dfrac{3}{10}$ だから、 $k^2\leqslant 2^{10}<k^3$

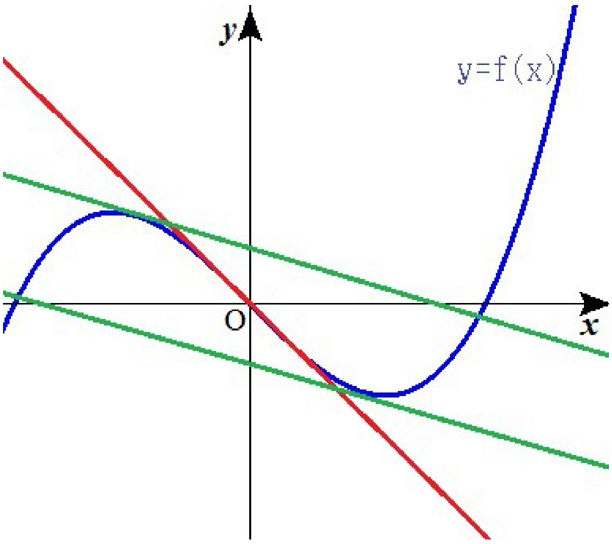
これを満たす最小の k だが 3 乗の方に注目して、 $2^{10}=1024$ を少しだけ越えるために 10 の次の 11 から順に 11, 12, 13, … を試してみる。

- $k=11$ のとき $k^2=121, k^3=1331$

なんだ、一発で見つかった。

【答】ア＝6、イ＝2、ウ＝9、エ＝0、オカ＝3／4、キクケ＝－4／3、コ＝5、サ＝2、シ＝6、ス＝8、セソ＝1／3、タ＝1、チ＝2、ツ＝7、テ＝3、ト＝1、ナ＝②、ニ＝⓪、ヌ＝0、ネ＝④、ノ＝3、ハヒ＝11

【第 2 問】



(1)　$x=1$ で極値をとるから $f'(1)=0$ ところで微分すると $f'(x)=3px^2+q$ だから
$f'(1)=3p+q=0 \Rightarrow q=-3p$
接線の方程式は $y-(ps^3-3ps)=(3ps^2-3p)(x-s)$ だから

$$y=(3ps^2-3p)x-2ps^3 \quad \cdots\cdots ①$$

傾き＝ $3ps^2-3p$ は 2 次関数だ。最小になるのは $s=0$ のときで最小値は $-3p$
つまり原点における接線 $y=-3px$ が一番傾きの激しい右下がりの直線である(上図の赤線)。ということは原点が変曲点ということだ。原点より左では上に凸、右では下に凸になる奇関数（原点に関して点対称）である。

(2) 直線 $y=-x$ が $y=-3px$ と一致したら ($-3p=-1$ のとき) 変曲点しか共有点はない。
$-3p \geqslant -1$ のときは $y=-x$ の方が「共有点 1 個」の接線より傾きが激しいのだから共有点は 1 個のままだ。反対に $-3p<-1$ だと $y=-x$ の方が傾きがゆるやかになるから共有点は 3 個になる（上図の緑の線の傾き）。
直線 l というのは直線 $y=-x$ を上下に平行移動したものであるから、緑の線のようであると共有点は 1～3 個と変化してしまう。常に 1 個であるのはそうでないときだから $-3p \geqslant -1$ すなわち
$0<p \leqslant \dfrac{1}{3}$ である。

(3) 緑の線が $y=-x+r$ であると考えよう。共有点が 2 個になるのは 3 次関数のグラフに接するときだから①の傾きが —1 である。すなわち

$$3ps^2-3p=-1 \Leftrightarrow s=\pm\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}$$

緑の線を 2 本描いておいたように、たしかにこのような接線は 2 本ある。その接線の y切片は①より

$$r=-2ps^3=-2p\left(\pm\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}\right)^3=\mp 2p\frac{3p-1}{3p}\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}=\mp\frac{6p-2}{3}\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}$$

この右辺の値の内側にあれば、すなわち

$$|r|<\frac{6p-2}{3}\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}$$

のときは共有点は 3 個である。

(4) この放物線を積分すると

$$\int_u^t (x^2-1)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_u^t=\frac{1}{3}(t^3-u^3)-(t-u)$$

これが f(t) と t について恒等的に等しい。

$$pt^3-3pt=\frac{1}{3}(t^3-u^3)-(t-u)$$

係数比較法により

$$p=\frac{1}{3}, -3p=-1, -\frac{1}{3}u^3+u=0$$

最後の等式から $u^3-3u=0 \Rightarrow u(u^2-3)=0 \Rightarrow u=0, \pm\sqrt{3}$ で u≧1 だから $u=\sqrt{3}$

【答】ア＝0、イウ＝－3、エ＝3、オ＝3、カ＝2、キ＝0、クケ＝－3、コサ＝－1、シ＝1、ス＝3、セ＝1、ソタ＝1／3、チ＝3、ツ＝1、テ＝3、ト＝2、ナ＝6、ニ＝2、ヌ＝3、ネノ＝1／3、ハ＝3

【第3問】(1) 初項は $b_1=\frac{a_1}{1\times 2}=\frac{-5}{2}$ であり、漸化式は

$$b_{n+1}-b_n=\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}-\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{na_{n+1}-(n+2)a_n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{4(n+1)}{n(n+1)(n+2)}=\frac{4}{n(n+2)}$$

となる。これを部分分数分解すると

$$\frac{4}{k(k+2)}=2(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})$$

これを k=1〜n-1 まで総和をとると

$$2(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+2(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+2(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1})+2(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n})+2(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})$$

$$=2(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

(10両編成の電車があったとして、1号車と2号車の先頭と、9号車と10号車の末尾が生き残るとと考えると分かりやすい。)通分すると

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{k(k+2)}=2\times\frac{3n(n+1)-2(n+1)-2n}{2n(n+1)}=\frac{3n^2-n-2}{n(n+1)}$$

階差と元の数列の関係公式: $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)$ より

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\frac{-5}{2}+\frac{3n^2-n-2}{n(n+1)}=\frac{n^2-7n-4}{2n(n+1)}$$

さらに $a_n=n(n+1)b_n=\frac{n^2-7n-4}{2}$ が導かれる。

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$ だから $c_1=S_1=1(2a_1-24)=1(-10-24)=-34$

$n\geqq 2$ のとき

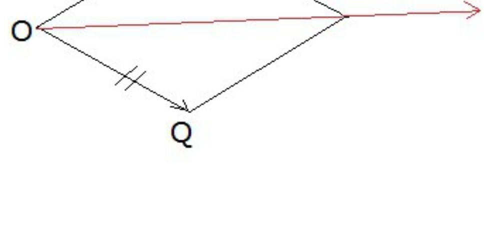
$$c_n=S_n-S_{n-1}=n(2a_n-24)-(n-1)(2a_{n-1}-24)=n(n^2-7n-28)-(n-1)\{(n-1)^2-7(n-1)-28\}$$
$$=n^3-7n^2-28n-\{(n-1)^3-7(n-1)^2-28(n-1)\}=-(-3n^2+3n-1)+7(-2n+1)-28$$
$$=3n^2-17n-20=(n+1)(3n-20)\quad\cdots\cdots①$$

①が負になるのは $-1<n<\frac{20}{3}=6.66$ より $1\leqq n\leqq 6$ のとき。だから

$$\sum_{k=1}^{n}|c_k|=-(c_1+\cdots+c_6)+c_7+\cdots+c_{10}=c_1+\cdots+c_{10}-2(c_1+\cdots+c_6)=S_{10}-2S_6$$
$$=10(2a_{10}-24)-2\times 6(2a_6-24)=10(10^2-7\times 10-28)-2\times 6(6^2-7\times 6-28)$$
$$=10\times 2-12\times(-34)=428$$

【答】アイウ=−5/2、エ=4、オ=2、カ=2、キ=3、ク=2、ケ=1、コ=7、サ=4、シ=2、スセソ=−34、タ=1、チ=3、ツテ=20、ト=6、ナニ=−2、ヌネノ=428

【第4問】(1) $|\vec{OP}|=\sqrt{0^2+6^2+3^2}=3\sqrt{5}$,
$|\vec{OQ}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-5)^2}=3\sqrt{5}$ で長さが等しいので、右図のように菱形となり対角線は



$\vec{OP}+\vec{OQ}=(0,6,3)+(4,-2,-5)=(4,4,-2)$ の方向になる。よって $\vec{OA}$ もこれと同じ方向だから

$\vec{OA}=t(\vec{OP}+\vec{OQ})=t(4,4,-2)$ だが長さが9だから

$$|\vec{OA}|=|t|\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=6|t|=9\Rightarrow t=\pm\frac{3}{2}$$

x 座標が正だから $t=\dfrac{3}{2}$ として $\vec{OA}=\dfrac{3}{2}(4,4,-2)=(6,6,-3)$ これが A の座標だ。

(2) $\vec{n}=(2,b,c)$ とおいて内積＝0とおけばよい。

$\vec{OP}\cdot\vec{n}=(0,6,3)\cdot(2,b,c)=6b+3c=0$, $\vec{OQ}\cdot\vec{n}=(4,-2,-5)\cdot(2,b,c)=8-2b-5c=0$

個の連立方程式を解いて $b=-1, c=2 \Rightarrow \vec{n}=(2,-1,2)$

$\vec{HR}=\vec{OR}-\vec{OH}=k\vec{n} \Rightarrow \vec{OH}=\vec{OR}-k\vec{n}$ であり、 $\vec{OH}$ は O, P, Q が作る平面上のベクトルだから、この平面の法線ベクトル $\vec{n}$ と垂直である。よって $\vec{OH}\cdot\vec{n}=0$ したがって

$\vec{OH}\cdot\vec{n}=(\vec{OR}-k\vec{n})\cdot\vec{n}=\vec{OR}\cdot\vec{n}-k\vec{n}\cdot\vec{n}=(12,0,-3)\cdot(2,-1,2)-k(2,-1,2)\cdot(2,-1,2)$
$=(24+0-6)-(4+1+4)k=18-9k=0 \Rightarrow k=2$

これより $\vec{OH}=\vec{OR}-k\vec{n}=(12,0,-3)-2(2,-1,2)=(8,2,-7)$ これが H の座標だ。

長さは $|\vec{HR}|=|\vec{OR}-\vec{OH}|=|(12,0,-3)-(8,2,-7)|=\sqrt{(12-8)^2+(-2)^2+(-3+7)^2}=6$

(3) $A(6,6,-3), H(8,2,-7)$ より

$AH=\sqrt{(6-8)^2+(6-2)^2+(-3+7)^2}=6$

H から一番遠い点は線分 HA を半径分、延長したところにある。

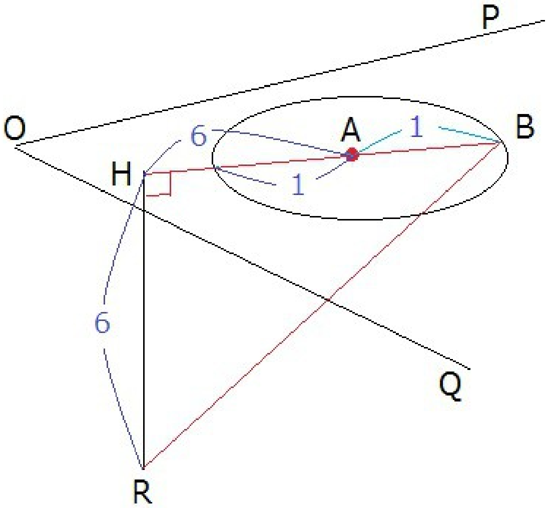
よって、RB の最大値は

$RB=\sqrt{HR^2+(AH+1)^2}=\sqrt{6^2+(6+1)^2}=\sqrt{85}$

右図を参照して $\vec{HB}=\dfrac{6+1}{6}\vec{HA}=\dfrac{7}{6}\vec{HA}$ よって

$\vec{OB}=\vec{OH}+\vec{HB}=(8,2,-7)+\dfrac{7}{6}((6,6,-3)-(8,2,-7))$

$=(8,2,-7)+(-\dfrac{7}{3},\dfrac{14}{3},\dfrac{14}{3})=(\dfrac{17}{3},\dfrac{20}{3},\dfrac{-7}{3})$



【答】アイ＝3√5、ウエ＝3√5、オ＝6、カ＝6、キク＝－3、ケコ＝－1、サ＝2、シ＝0、ス＝2、セ＝8、ソ＝2、タチ＝－7、ツ＝6、テ＝6、トナ＝85、ニヌ＝7／6、ネノハ＝17／3、ヒフ＝20、ヘホ＝－7

【第 5 問】(1) z 値は $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ で変換されるから、 $Z=\dfrac{X-95}{20}$ である。

$X \geqslant 100 \Leftrightarrow \dfrac{X-95}{20} \geqslant \dfrac{100-95}{20} \Leftrightarrow Z \geqslant 0.25$

正規分布表で $z_0=0.25$ に対応する「灰色部分の面積（＝確率）」を探すと、0.0987 である。我々が求めたいのは灰色の右側の面積（ z_0 ～ ∞ に対応する面積）だから

$0.5-0.0987=0.4013$ 四捨五入して 40％である。

つぎは正規分布表を逆引きになる。 $0.5-0.10=0.4000$ に一番近い面積を探すと 0.3997 で $z_0=1.28$ が対応する z 値である。 $Z=\dfrac{X-95}{20}=1.28 \Rightarrow X=95+1.28\times20=120.6$ 四捨五入して 121 点である。

(2) 二項分布に従う Y の期待値と分散は、それぞれ $E(Y)=np, V(Y)=npq=np(1-p)$ だから

$E(Y)=np=19\times0.1=1.9$, $V(Y)=np(1-p)=19\times0.1\times0.9=1.71$

二項分布の確率を求めると

$$p_1 = P(Y=1) = {}_{19}C_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^{18} \quad , \quad p_2 = P(Y=2) = {}_{19}C_2\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^{17}$$

だから、両者の比をとって

$$\frac{p_2}{p_2} = \frac{{}_{19}C_1}{{}_{19}C_2}\cdot\frac{(1/10)^1(9/10)^{18}}{(1/10)^2(9/10)^{17}} = \frac{2!\,17!}{1!\,18!}\cdot\frac{(9/10)}{(1/10)} = 1$$

(3) 95%信頼区間は、 $m_0 - \frac{1.96\times\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq m_0 + \frac{1.96\times\sigma}{\sqrt{n}}$ （1.96 は暗記していなくても正規分布表から分かる）だから

$$99 - \frac{1.96\times 20}{\sqrt{96}} \leqq m \leqq 99 + \frac{1.96\times 20}{\sqrt{96}}$$

となるが、$\sqrt{\ }$の計算は次のようにやる。

$$\frac{1.96\times 20}{\sqrt{96}} = \frac{1.96\times 20}{4\sqrt{6}} = \frac{0.98\times 10}{2.45} = 9.8 \div 2.45 = 4$$ (最後はピッタリ割り切れる)

したがって $99-4 \leqq m \leqq 99+4 \Rightarrow 95 \leqq m \leqq 103$

幅＝ $\frac{1.96\times\sigma}{\sqrt{n}}\times 2$ だが $103-95=8$ とやれば簡単。幅の式で σ が 20 から 15 へと $\frac{3}{4}$ 倍になれば、幅も $\frac{3}{4}$ 倍になるから、 $8\times\frac{3}{4}=6$

【答】アイ＝95、ウエ＝20、オカキ＝0．25、クケ＝40、コ＝①、サシ＝1．9、スセソ＝1．71、タ＝②、チツ＝95、テトナ＝103、ニ＝8、ヌ＝6