【第１問】[1](1) 円の式は　$(x-3)^2+(y-1)^2=1$　より　$x^2+y^2-6x-2y+9=0$

(2) 直線の式　$y=ax$　を円の式に代入して　$x^2+a^2x^2-6x-2ax+9=0$　整理して

$$(1+a^2)x^2-2(3+a)x+9=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

これの判別式が 0 になればよいから　$D/4=(3+a)^2-9(1+a^2)=0 \Rightarrow 8a^2-6a=0$

$$2a(4a-3)=0 \Rightarrow a=0, \frac{3}{4}$$

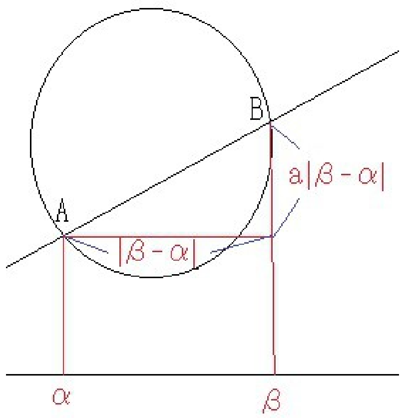
後者の場合、その値を (*) に代入すれば

$$\frac{25}{16}x^2-\frac{30}{4}x+9=0 \quad \text{すなわち} \quad (5x-12)^2=0$$

だから　$x=\frac{12}{5}, y=\frac{3}{4}\times\frac{12}{5}=\frac{9}{5}$　が接点である。この点における法線は

$$y-\frac{9}{5}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{12}{5}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{-4}{3}x+5$$

(3)



2次方程式 (*) の2つの実数解を　$x=\alpha, \beta$　とすれば、弦 AB の長さは

$$AB=\sqrt{(|\beta-\alpha|)^2+(a|\beta-\alpha|)^2}=\sqrt{1+a^2}|\beta-\alpha|$$

あとは解と係数の関係から　$\alpha+\beta=\frac{2(a+3)}{1+a^2}, \alpha\beta=\frac{9}{1+a^2}$　だから

$$|\beta-\alpha|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\frac{4(a+3)^2}{(1+a^2)^2}-\frac{36}{1+a^2}}=\frac{\sqrt{-32a^2+24a}}{1+a^2}=\frac{2\sqrt{6a-8a^2}}{1+a^2}$$

よって弦長は

$$AB=\frac{2\sqrt{6a-8a^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

弦長が 2 になるのは

$$\frac{2\sqrt{6a-8a^2}}{\sqrt{1+a^2}}=2 \Rightarrow 6a-8a^2=1+a^2 \Rightarrow 9a^2-6a+1=0 \Rightarrow (3a-1)^2=0 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

[2](1)　$2^0=1, 2^2=1$　だから　$\log_2 1=0, \log_2 2=1$　である。 $\log_2 x$　が整数だと　x　は 2 の整数乗だから、それを　$1\leqslant x\leqslant 100$　の範囲で探すと

$$x=2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^6=64$$

の 7 個である。

(2)　$r=\log_2 3$　ならば　$\log_2 54=\log_2(3^3\times 2)=3\log_2 3+\log_2 2=3r+1$

また $\dfrac{r+3}{2}=\dfrac{1}{2}(\log_2 3+\log_2 8)=\dfrac{1}{2}\log_2 24=\log_2\sqrt{24}$ で、一方 $\log_2 5=\log_2\sqrt{25}>\log_2\sqrt{24}$ より

$$\log_2 5>\frac{r+3}{2}$$

であり、 $\log_{1/2}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\log_2 1/\sqrt{3}}{\log_2 1/2}=\dfrac{-\frac{1}{2}\log_2 3}{-1}=\dfrac{1}{2}r<r$ ($r>0$ だから。)である。

(3) $\log_k 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 k}=\dfrac{1}{\log_2 k}$ だが、ここで $k\geqslant 3$ とすると $\log_2 k>\log_2 2=1\Rightarrow\dfrac{1}{\log_2 k}<1$ つまり

$0\leqslant\dfrac{1}{\log_2 k}<0+1$ よって求める整数 n は $n=0$ である。

$\dfrac{m}{10}\leqslant\log_k 2=\dfrac{1}{\log_2 k}$ を書き直すと $\log_2 k\leqslant\dfrac{10}{m}$ であり、これをさらに書き直すと

$$k\leqslant 2^{10/m} \quad \text{すなわち} \quad k^m\leqslant 2^{10}$$

対偶をとれば、 $\dfrac{m}{10}>\log_k 2$ と $k^m>2^{10}$ は同値である。

そこで $\log_7 2(k=7)$ を調べよう。7 のベキは $7^2=49, 7^3=343, 7^4=2401$ だから

$$7^3=343<2^{10}=1024<7^4=2401$$

前者の不等式: $7^3\leqslant 2^{10}$ から $\dfrac{3}{10}\leqslant\log_7 2$ であり、後者の不等式: $7^4>2^{10}$ から $\dfrac{4}{10}>\log_7 2$

である。まとめると $\dfrac{3}{10}\leqslant\log_7 2<\dfrac{4}{10}$ だから小数第 1 位は 3 である。

反対に小数第 1 位は 2 だと $\dfrac{2}{10}\leqslant\log_k 2<\dfrac{3}{10}$ だから、 $k^2\leqslant 2^{10}<k^3$

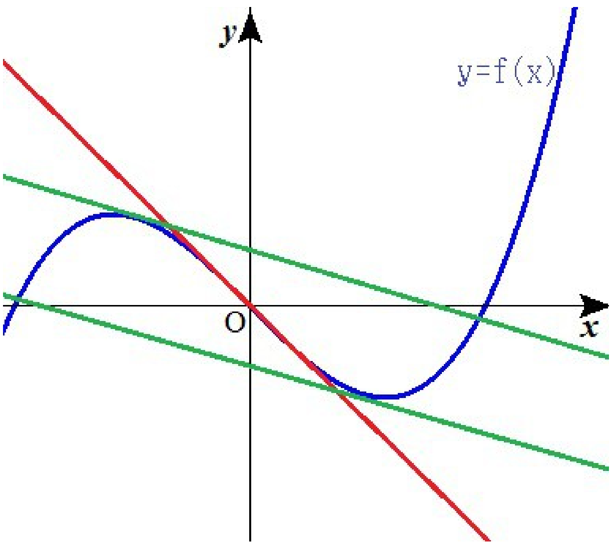
これを満たす最小の k だが 3 乗の方に注目して、 $2^{10}=1024$ を少しだけ越えるために 10 の次の 11 から順に 11, 12, 13, … を試してみる。

- $k=11$ のとき $k^2=121, k^3=1331$

なんだ、一発で見つかった。

【答】ア＝6、イ＝2、ウ＝9、エ＝0、オカ＝3／4、キクケ＝－4／3、コ＝5、サ＝2、シ＝6、ス＝8、セソ＝1／3、タ＝1、チ＝2、ツ＝7、テ＝3、ト＝1、ナ＝②、ニ＝⓪、ヌ＝0、ネ＝④、ノ＝3、ハヒ＝11

【第 2 問】



(1)　$x=1$ で極値をとるから $f'(1)=0$ ところで微分すると $f'(x)=3px^2+q$ だから
$f'(1)=3p+q=0 \Rightarrow q=-3p$
接線の方程式は $y-(ps^3-3ps)=(3ps^2-3p)(x-s)$ だから

$$y=(3ps^2-3p)x-2ps^3 \quad \cdots\cdots ①$$

傾き＝ $3ps^2-3p$ は 2 次関数だ。最小になるのは $s=0$ のときで最小値は $-3p$
つまり原点における接線 $y=-3px$ が一番傾きの激しい右下がりの直線である(上図の赤線)。ということは原点が変曲点ということだ。原点より左では上に凸、右では下に凸になる奇関数（原点に関して点対称）である。

(2) 直線 $y=-x$ が $y=-3px$ と一致したら ($-3p=-1$ のとき) 変曲点しか共有点はない。
$-3p \geqslant -1$ のときは $y=-x$ の方が「共有点 1 個」の接線より傾きが激しいのだから共有点は 1 個のままだ。反対に $-3p<-1$ だと $y=-x$ の方が傾きがゆるやかになるから共有点は 3 個になる（上図の緑の線の傾き）。
直線 l というのは直線 $y=-x$ を上下に平行移動したものであるから、緑の線のようであると共有点は 1～3 個と変化してしまう。常に 1 個であるのはそうでないときだから $-3p \geqslant -1$ すなわち
$0<p \leqslant \dfrac{1}{3}$ である。

(3) 緑の線が $y=-x+r$ であると考えよう。共有点が 2 個になるのは 3 次関数のグラフに接するときだから①の傾きが —1 である。すなわち

$$3ps^2-3p=-1 \Leftrightarrow s=\pm\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}$$

緑の線を 2 本描いておいたように、たしかにこのような接線は 2 本ある。その接線の y切片は①より

$$r=-2ps^3=-2p\left(\pm\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}\right)^3=\mp 2p\frac{3p-1}{3p}\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}=\mp\frac{6p-2}{3}\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}$$

この右辺の値の内側にあれば、すなわち

$$|r|<\frac{6p-2}{3}\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}$$

のときは共有点は 3 個である。

(4) この放物線を積分すると

$$\int_u^t (x^2-1)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_u^t=\frac{1}{3}(t^3-u^3)-(t-u)$$

これが f(t) と t について恒等的に等しい。

$$pt^3-3pt=\frac{1}{3}(t^3-u^3)-(t-u)$$

係数比較法により

$$p=\frac{1}{3}, -3p=-1, -\frac{1}{3}u^3+u=0$$

最後の等式から $u^3-3u=0 \Rightarrow u(u^2-3)=0 \Rightarrow u=0, \pm\sqrt{3}$ で u≧1 だから $u=\sqrt{3}$

【答】ア＝0、イウ＝－3、エ＝3、オ＝3、カ＝2、キ＝0、クケ＝－3、コサ＝－1、シ＝1、ス＝3、セ＝1、ソタ＝1／3、チ＝3、ツ＝1、テ＝3、ト＝2、ナ＝6、ニ＝2、ヌ＝3、ネノ＝1／3、ハ＝3

【第 3 問】[1]加法定理より

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad ,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

だから $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ と

$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ が出る。

また $\tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2-\sqrt{3}$

[2] $0\leqslant\sin\theta\leqslant 1$ より $0\leqslant x=\sin^2\theta\leqslant 1$ であり、

$$y=3(\sin^2\theta)^2+(1-\sin^2\theta)^2=3x^2+(1-x)^2=4x^2-2x+1=4(x-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}$$

頂点から遠い端点である $x=1$ で最大値 $y=4\cdot 1^2-2\cdot 1+1=3$ をとり、頂点の $x=\frac{1}{4}$ で最小値 $y=4(\frac{1}{4}-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ をとる。

最大値をとるのは $x=\sin^2\theta=1\Rightarrow\sin\theta=1\Rightarrow\theta=90^\circ$ で、

最小値をとるのは $x=\sin^2\theta=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=30^\circ$ である。

【答】ア＝④、イ＝⓪、ウ＝6、エ＝2、オ＝4、カ＝6、キ＝2、ク＝4、ケ＝2、コ＝3、サ＝0、シ＝1、ス＝4、セ＝2、ソ＝1、タ＝1、チ＝3、ツテ＝1／4、トナ＝3／4、ニヌ＝90、ネノ＝30

【第 4 問】(1) $x=-1$ を代入すると 0 になるから、 $x+1$ で割り算して商を求めて

$$P(x)=(x+1)\{x^2+(k-1)x+k+2\}$$

$Q(x)=x^2+(k-1)x+k+2$ の判別式が負だから

$$D=(k-1)^2-4(k+2)=k^2-6k-7=(k+1)(k-7)<0$$

よって $-1<k<7$

解と係数の関係から $\alpha+\beta=-(k-1),\alpha\beta=k+2$ だから

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(k-1)^2-2(k+2)=k^2-4k-3=(k-2)^2-7$$

したがって $-1<k<7$ のとき最小値 -7 を持つ。またこのとき

$$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(k+2)^2=16 \quad ,$$
$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(-7)^2-2\cdot 16=17$$

である。

(2) $k=2$ のとき $Q(x)=x^2+x+4$ だから解は $x=\frac{-1\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

二項定理の 4 乗版は $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ だから

$$X^4=(\alpha+\beta i)^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta i+6\alpha^2(\beta i)^2+4\alpha(\beta i)^3+(\beta i)^4 \quad ,$$
$$Y^4=(\alpha-\beta i)^4=\alpha^4-4\alpha^3\beta i+6\alpha^2(\beta i)^2-4\alpha(\beta i)^3+(\beta i)^4$$

よって辺々足して

$$X^4+Y^4=2\{\alpha^4+6\alpha^2(\beta i)^2+(\beta i)^4\}=2(\alpha^4+\beta^4)-12\alpha^2\beta^2=2\times 17-12\times 16=-158$$

【答】ア＝1、イ＝1、ウ＝2、エオ＝－1、カ＝7、キ＝4、ク＝3、ケ＝2、コサ＝－7、シス＝16、

セソ＝17、タ＝1、チツ＝15、テ＝2、トナ＝12、ニヌネノ＝－158