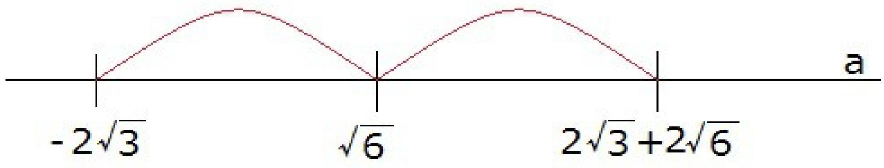
【第 1 問】[1](1)　$f(0)=-\sqrt{3}a\leqq 6 \to a\geqq -\dfrac{6}{\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}$　であり、

$$f(6)=6(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}a\geqq 0\to a\leqq\frac{6(1+\sqrt{2})}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})=2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$$

(2) 中点は平均（足して 2 で割る）だから　$\dfrac{P+Q}{2}=\dfrac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

(3) 下図において中心と半径を求めればよい。




中心は前述のとおり　$\sqrt{6}$　で、半径は　$\dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-(-2\sqrt{3})}{2}=\sqrt{6}+2\sqrt{3}$　だから

$$|a-\sqrt{6}|\leqq\sqrt{6}+2\sqrt{3}$$

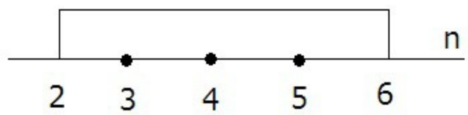
[2] (1) 逆は　$q\to p$　のことだから

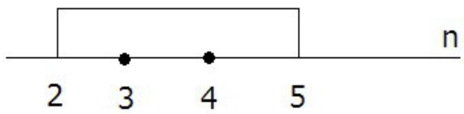
$$(n>2\wedge n<c)\to(n^2-8n+15=0)$$

対偶は　$\bar{q}\to\bar{p}$　のことだから

$$\neg(n>2\wedge n<c)\to\neg(n^2-8n+15=0)$$　すなわち　$(n\leqq 2\vee n\geqq c)\to(n^2-8n+15\neq 0)$

(2)　$(n>2\wedge n<c)\to(n=3\vee n=5)$　ではないことを聞いている。仮定の不等式の解を図示すると




上図の黒丸である。　$c$　の値によって変わってくるが、　$n=3$　と　$n=4$　はいつでも解に入ってくる。後者は入ってはまずい値だから、　$n=4$　が反例になる。

(3)　$(n=3\vee n=5)\to(n>2\wedge n<c)$　でないのはどういう場合かを聞いている。結論の解集合は

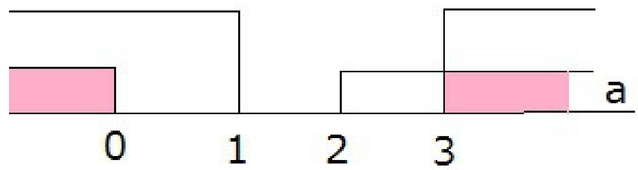
- $c=4$　のとき解集合は　$n=3$
- $c=5$　のとき解集合は　$n=3\vee n=4$
- $c=6$　のとき解集合は　$n=3\vee n=4\vee n=5$
- $c=7$　のとき解集合は　$n=3\vee n=4\vee n=5\vee n=6$
- $c=8$　のとき解集合は　$n=3\vee n=4\vee n=5\vee n=6\vee n=7$

となる。仮定の解集合が結論の解集合にふくまれないのは　$c=4$　と　$c=5$　の場合だ。選択肢にあるのは前者だ。

(4)　$q=\{k|2<k<c\}$　だから　$q=\{k|2<k\}\cap\{k|k\geqq c\}^c$　つまり　$A\cap\bar{B}$　である。

[3](1) 判別式が正になればよいから　$D/4=(2a-b)^2-b(b-4a+3)=4a^2-3b>0$　よって
　$b<\dfrac{4}{3}a^2$　であり、実数解は　$x=\dfrac{-(2a-b)\pm\sqrt{D/4}}{b}=\dfrac{b-2a\pm\sqrt{4a^2-3b}}{b}$

(2) 2次方程式は　$a^2x^2+2(2a-a^2)x+a^2-4a+3=0$　(グラフは下に凸)であり、
　$D/4=4a^2-3a^2=a^2>0$　だからいつでも異なる2つの実数解を持つ。
正と負の解を持つには　$f(0)<0$　でありさえすればよい。よって
$$a^2-4a+3<0\Leftrightarrow(a-1)(a-3)<0\Leftrightarrow 1<a<3$$
正の2解を持つには　$f(0)>0$　かつ軸　$>0$　だから
$$(a<1,3<a)\ \text{かつ}\ \frac{-2a-a^2}{a^2}>0$$
後者は両辺を　$a^2$　倍して　$a^2-2a>0\Leftrightarrow a(a-2)>0\Leftrightarrow a<0,2<a$　これらの共通部分は




$$a<0,3<a$$

【答】アイウ＝－2√３、エオ＝2√３、カキ＝2√６、ク＝√６、ケ＝√６、コサシ＝√６＋2√３、ス＝⑤、セ＝②、ソ＝4、タ＝⓪、チ＝①、ツテ＝4／3、ト＝2、ナ＝1、ニ＝3、ヌ＝0、ネ＝3

---

【第2問】頂点　$A$　から対辺に下した垂線の足を　$H$　としよう。
$$AB\cos\angle ABC+AC\cos\angle ACB=BH+CH=BC=12$$
となる。また、余弦から正弦を求めると、
$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\quad,\quad \sin\angle ACB=\sqrt{1-\cos^2\angle ACB}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$
である。　$AH=AB\sin\angle ABC=AC\sin\angle ACB$　だから　$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\dfrac{4\sqrt{2}/9}{2\sqrt{2}/3}=\dfrac{2}{3}$
ここで　$AB=2k, AC=3k$　とおけば
$$2k\times\frac{1}{3}+3k\times\frac{7}{9}=12\Rightarrow 3k=12\Rightarrow k=4, AB=8, AC=12$$
余弦定理より
$$AD^2=AB^2+BD^2-2\mathrm{AB}\cdot BD\cos\angle ABC=64+36-96\times\frac{1}{3}=68\Rightarrow AD=2\sqrt{17}$$

[2](1) 度数は左から　1,7,16,12,8,1,2 **計**47　である。中央値は　$\dfrac{1+47}{2}=24$　番目だから、左から3番目の階級に所属する。よって　$40\leqq Q_2<44$　選択肢から選ぶと③しかない。

(2) (I) 箱の真ん中の太めの縦線に注目すれば、だんだん増えている傾向にある(絶対ではないが)。
(II) 最大値の最大は2011年で、最小は1996年で、その差は　$15.0-11.6=3.4>2$
(III) 第1四分位数は　$\dfrac{1+23}{2}=12$　番目，第3四分位数は　$\dfrac{25+47}{2}=36$　番目である。1996年

では9は $Q_2$ ～ $Q_3$ の間にあるから9以下は24～35県ある。一方、2014年では9は $min$ ～ $Q_1$ の間にあるから9以下は1～11県ある。1996年の半分は12～17.5県になるから正しい。

(3) Yを見るとすべてが14未満だから、③はウソ。13以上14未満が存在するのに①ではないことになっているからウソ。あとは⓪か②だが、8以上9未満を数えてみると8県ある。これで選択肢は⓪しか残らない。

(4) 直線の式の傾きは $\dfrac{s_{XY}}{s_X^2}=\dfrac{1.75}{4.8}=0.364$ で⓪の0.36である。y切片は

$\bar{y}-\dfrac{s_{XY}}{s_X^2}\times\bar{x}=\dfrac{1.75}{4.8}=10.2-0.36\times9.6=6.744$ で⑥の6.74である。直線の式が

$y=0.36x+6.74$ となったので、 $x=4$ を代入して $y=0.36\times4+6.74=8.18$

【答】アイ＝12、ウエ＝2／3、オ＝8、カキ＝12、クケコ＝2√17、サ＝③、シ＝②、ス＝⓪、セ＝⓪、ソ＝⑥、タ＝⑦

---

【第3問】(1) (白, 白, 青, 青) の4枚のカードがあって、このうちの1枚だけが机上に出ているのだ。机下には(白, 青, 青) の3枚のカードがあって、ここから

　　机上と同じ白を掴む確率＝机上の色が変わらない確率＝ $\dfrac{1}{3}$

で、3人ともこうなればよいのだから、その確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$ である。

余事象を考えれば

　　机上と異なる青を掴む確率＝机上の色が変わる確率＝ $\dfrac{2}{3}$

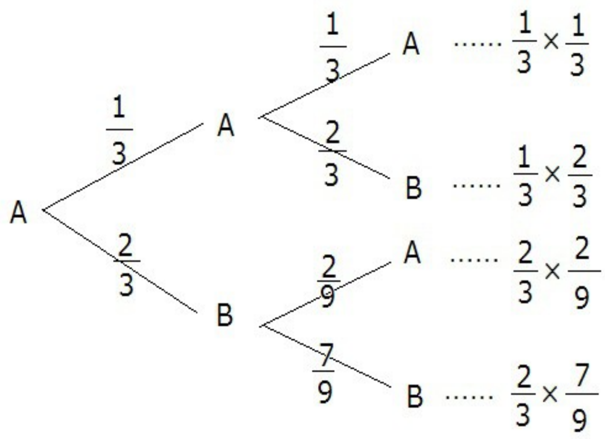
なので、3人ともこうなる確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$ である。

(2) いま求めたように、3人とも色が変わらないが $\dfrac{1}{27}$ 、3人とも色が変わるが $\dfrac{8}{27}$ だから、状態Aになる確率はこの2つを足して $\dfrac{1}{27}+\dfrac{8}{27}=\dfrac{1}{3}$ である。状態Bになるのはこれの余事象だから、その確率は $1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

(3) 1人について、机上の色が変わらないが $\dfrac{1}{3}$ で、変わるが $\dfrac{2}{3}$ であった。

いま3人の机上に(白, 白, 青) があるとき、(不変, 不変, 変) になる確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{27}$ であり、(変, 変, 不変) になる確率は $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$ であるから、合計して $\dfrac{2}{27}+\dfrac{4}{27}=\dfrac{2}{9}$

(4) 今までの結果をまとめると、P(A→A)＝ $\dfrac{1}{3}$ , P(A→B)＝ $\dfrac{2}{3}$ , P(B→A)＝ $\dfrac{2}{9}$ であることが分かった。それを樹形図にしたのが下図である。




2 回後に状態 A になる確率は、積と和の法則を使って

$$P(A\to A\to A)+P(A\to B\to A)\quad =\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}=\frac{7}{27}$$

(5) 2 回後に B になるのは (4) の余事象だから　$1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27}$

この中で P(A→B→B)は　$\frac{2}{3}\times\frac{7}{9}=\frac{14}{27}$

したがって、条件付き確率は　$\frac{14}{27}\div\frac{20}{27}=\frac{7}{10}$

【答】アイウ＝1／27、エオカ＝8／27、キク＝1／3、ケコ＝2／3、サシ＝2／9、スセソ＝7／27、タチツ＝7／10

---

【第 4 問】割り算して商と余りを求める。　$560\div16=35, 560\div13=43\cdots1$　より
$560=16\times35, 560=13\times43+1$

(1)　①を②に代入して　$16\times35=13\times43+1$　これが特殊解。両辺を　$c$　倍して

$$16\times35c=13\times43c+c$$

これと　$16x=13y+c$　を辺々引けば　$16(x-35c)=13(y-43c)=16\times13s$

(　$=16\times13s$　とおけるのは 16 と 13 の最小公倍数は　$16\times13$　だから。)

これより　$x-35c=13s, y-43c=16s$　だから　$x=13s+35c, y=16s+43c$

自然数を　$560^2$　で割って　1　余るから　$k>560^2$　なることに注意。

$$k=560^2\times1+l, l=560q+r, 0\leqq r<560\quad すなわち\quad k=560^2+560q+r\quad\cdots\cdots(*)$$

(2) (*) 式を書き直すと

$$k=(16\times35)^2+16\times35q+r=16(16\times35^2+35q)+r$$

だから　$k$　が 16 の倍数なら、　$r$　も 16 の倍数。　$r=16x$

また、　$560^2=(13\times43+1)^2=13^2\times43^2+2\times13\times43+1=13(13\times43^2+2\times43)+1$　より 13 で割ると 1 余る。(*) 式をもう一度書き直すと

$$k=13\times\square+1+(13\times43+1)q+r=13\times\triangle+1+q+r$$

だから　$k$　が 13 の倍数なら、　$1+q+r$　も 13 の倍数。　$1+q+r=13y$

(3) (*) 式を眺めながら、 $r \geqq 0$ かつ $k > 560^2$ に注意すれば $k$ を最小にするには $q = 0$ にすればよい。そうすると $1 + q + r = 1 + 0 + 16x = 13y \Rightarrow 16x = 13y - 1$
これは (1) で解いた不定方程式の $c = -1$ な場合だ。よって

$$x = 13s - 35, y = 16s - 43$$

$r \geqq 0, x \geqq 0$ だから $r$ を小さくするために $s = 3, x = 13 \times 3 - 35 = 4, r = 16x = 64$

(4) $k > 560^2$ だから $k = (560 + m)^2, m > 0$ である。( $m \geqq 0$ ではない。)

$$k = 560^2 + 2 \times 560m + m^2 = 560^2 + 560q + r$$

だから $2 \times 560m + m^2 = 560q + r$ となる。左辺を 560 で割った余りは、 $m^2$ かまたは $m^2$ を 560 で割った余りである。右辺を 560 で割った余りは $r(0 \leqq r < 560)$ であったから、両者から余りは

$$m^2 - 560 \times q' = r$$

である。 $m$ はできるだけ小さくしたいから、 $q' = 0, m^2 = r$ であり、 $2 \times 560m + m^2 = 560q + r$ から $2m = q$ であり、(2) から $1 + q + r = 1 + 2m + m^2 = (1 + m)^2 = 13y$ である。

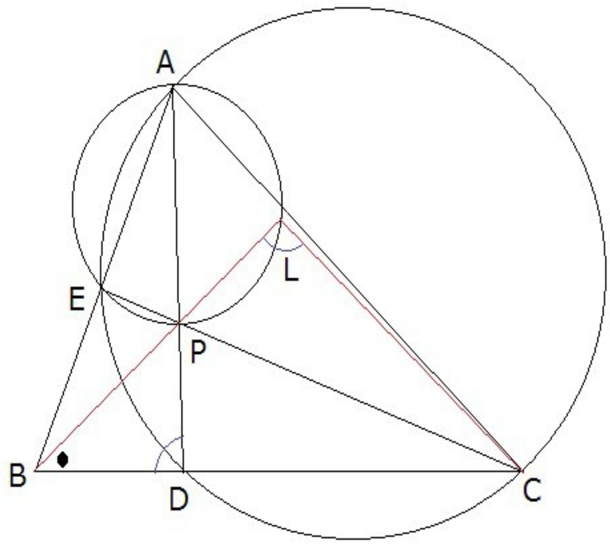
$13y$ をできるだけ小さい平方数にするには

$y = 13, m = 12, r = m^2 = 144, x = r \div 16 = 9, q = 13y - 1 - r = 24$ とすればよい。

【答】アイ＝35、ウエ＝43、オカ＝13、キク＝16、ケコ＝16、サ＝1、シス＝13、セ＝0、ソタ＝64、チツ＝12、テト＝24、ナニヌ＝144

---

【第5問】




方べきの定理により $BE \cdot BA = BD \cdot BC = 1 \cdot 4 = 4$

よって $BE \cdot \sqrt{6} = 4 \Rightarrow BE = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

メネラウスの定理により $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DC}{CB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1$ だから $\frac{AP}{PD} = \frac{CB}{DC} \cdot \frac{EA}{BE} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{6}/3}{2\sqrt{6}/3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{3}$

余弦定理より $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2\mathrm{AB} \cdot BD \cos \angle ABC = 6 + 1 - 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{9} = \frac{17}{3}$ だから

$AD = \sqrt{\frac{17}{3}} = \frac{\sqrt{51}}{3}$ であり $PD = \frac{3}{5}AD = \frac{\sqrt{51}}{5}$

変形余弦定理より $\cos \angle ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \frac{51/9 + 1 - 6}{2 \cdot (\sqrt{51}/3) \cdot 1} = \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{2\sqrt{51}} = \frac{\sqrt{51}}{51}$

さきとは異なる円で方べきの定理を使い $BP \cdot BL = BE \cdot BA = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{6} = 4$

また　$BD \cdot BC = 1 \cdot 4 = 4$　であるから両者を合わせれば　$BP \cdot BL = BD \cdot BC$

よって　$\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{BD}{BL}$　で　$\angle DBP$　は共通だから　$\triangle BPD$　と　$\triangle BCL$　は相似である。

対応する角は等しいから　$\angle BDP = \angle BLC$　である。

よって　$\tan \angle BLC = \tan \angle BDP = \tan \angle ADB$　だが　$\cos \angle ADB = \dfrac{\sqrt{51}}{51}$　より

$$\tan \angle ADB = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \angle ADB} - 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

【答】ア＝4、イウエ＝2√６／3、オカ＝2／3、キクケ＝√51／3、コサシ＝√51／5、
スセソタ＝√51／51、チ＝4、ツテ＝5√２