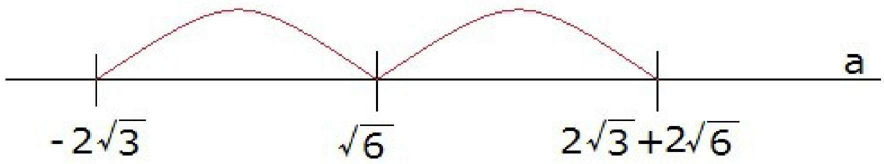
【第 1 問】[1](1)　$f(0)=-\sqrt{3}a\leqslant 6 \to a\geqslant -\dfrac{6}{\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}$　であり、

$$f(6)=6(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}a\geqslant 0\to a\leqslant\frac{6(1+\sqrt{2})}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})=2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$$

(2) 中点は平均（足して 2 で割る）だから　$\dfrac{P+Q}{2}=\dfrac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

(3) 下図において中心と半径を求めればよい。



中心は前述のとおり　$\sqrt{6}$　で、半径は　$\dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-(-2\sqrt{3})}{2}=\sqrt{6}+2\sqrt{3}$　だから

$$|a-\sqrt{6}|\leqslant\sqrt{6}+2\sqrt{3}$$

(4)　$f(s)=(1+\sqrt{2})s-\sqrt{3}a=6-s\to(2+\sqrt{2})s=6+\sqrt{3}a$　を解いて

$$s=\frac{6}{2+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}=3(2-\sqrt{2})+\sqrt{3}\frac{2-\sqrt{2}}{2}a=6-3\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{2})a$$

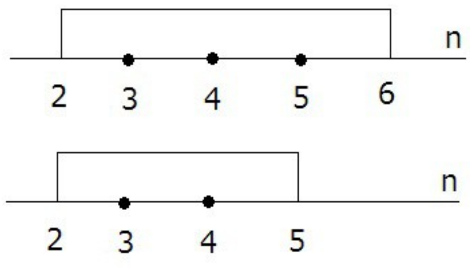
[2] (1) 逆は　$q\to p$　のことだから

$$(n>2\wedge n<c)\to(n^2-8n+15=0)$$

対偶は　$\bar{q}\to\bar{p}$　のことだから

$$\neg(n>2\wedge n<c)\to\neg(n^2-8n+15=0)\quad\text{すなわち}\quad(n\leqslant 2\vee n\geqslant c)\to(n^2-8n+15\neq 0)$$

(2)　$(n>2\wedge n<c)\to(n=3\vee n=5)$　ではないことを聞いている。仮定の不等式の解を図示すると



上図の黒丸である。　c　の値によって変わってくるが、　$n=3$　と　$n=4$　はいつでも解に入ってくる。後者は入ってはまずい値だから、　$n=4$　が反例になる。

(3)　$(n=3\vee n=5)\to(n>2\wedge n<c)$　でないのはどういう場合かを聞いている。結論の解集合は

- $c=4$　のとき解集合は　$n=3$
- $c=5$　のとき解集合は　$n=3\vee n=4$
- $c=6$　のとき解集合は　$n=3\vee n=4\vee n=5$
- $c=7$　のとき解集合は　$n=3\vee n=4\vee n=5\vee n=6$
- $c=8$　のとき解集合は　$n=3\vee n=4\vee n=5\vee n=6\vee n=7$

となる。仮定の解集合が結論の解集合にふくまれないのは　$c=4$　と　$c=5$　の場合だ。選択肢に

あるのは前者だ。

(4)　$q=\{k|2<k<c\}$　だから　$q=\{k|2<k\}\cap\{k|k\geqslant c\}^c$　つまり　$A\cap\bar{B}$　である。

【答】アイウ＝－2√3、エオ＝2√3、カキ＝2√6、ク＝√6、ケ＝√6、コサシ＝√6＋2√3、スセソタチツ＝6－3√2＋(√3－√6／2)、テ＝3、ト＝⑤、ナ＝②、ニ＝4、ヌ＝⓪、ネ＝①

【第 2 問】[1](1) 平方完成して　$y=(x-c)^2-c^2-c+6$　より頂点は　$(c,-c^2-c+6)$
$f(1)=7-3c$　,　$f(3)=15-7c$　だから　$f(1)\leqslant f(3)\Leftrightarrow 7-3c\leqslant 15-7c$　よって　$c\leqslant 2$

(2) グラフの放物線は下に凸だから、最大値は　$f(1), f(3)$　のうちの大きい方だ。

- $c\leqslant 2$　のとき　$M=f(3)=15-7c$
- $c>2$　のとき　$M=f(1)=7-3c$

$-5<M<36$　になるようにすると、

- $c\leqslant 2$　かつ　$-5<15-7c<36\Leftrightarrow -3<c<\dfrac{20}{7}$　よって　$-3<c\leqslant 2$
- $c>2$　かつ　$-5<7-3c<36\Leftrightarrow -\dfrac{29}{3}<c<4$　よって　$2<c<4$

両者の合併集合をとって　$-3<c<4$

[2](1) 判別式が正になればよいから　$D/4=(2a-b)^2-b(b-4a+3)=4a^2-3b>0$　よって
$b<\dfrac{4}{3}a^2$　　であり、実数解は　$x=\dfrac{-(2a-b)\pm\sqrt{D/4}}{b}=\dfrac{b-2a\pm\sqrt{4a^2-3b}}{b}$

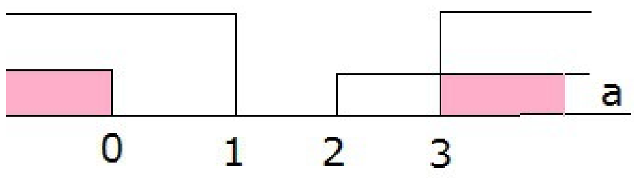
(2) 2 次方程式は　$a^2x^2+2(2a-a^2)x+a^2-4a+3=0$　(グラフは下に凸)であり、
$D/4=4a^2-3a^2=a^2>0$　だからいつでも異なる 2 つの実数解を持つ。
正と負の解を持つには　$f(0)<0$　でありさえすればよい。よって

$$a^2-4a+3<0\Leftrightarrow(a-1)(a-3)<0\Leftrightarrow 1<a<3$$

正の 2 解を持つには　$f(0)>0$　かつ軸　>0　だから

$$(a<1,3<a)\ \text{かつ}\ \frac{-2a-a^2}{a^2}>0$$

後者は両辺を　a^2　倍して　$a^2-2a>0\Leftrightarrow a(a-2)>0\Leftrightarrow a<0,2<a$　これらの共通部分は



$$a<0,3<a$$

【答】ア＝－、イ＝6、ウ＝2、エ＝3、オ＝4、カキ＝4／3、ク＝2、ケ＝1、コ＝3、サ＝0、シ＝3

【第 3 問】頂点　A　から対辺に下した垂線の足を　H　としよう。

$$AB\cos\angle ABC+AC\cos\angle ACB=BH+CH=BC=12$$

となる。また、余弦から正弦を求めると、

$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\quad,\quad \sin\angle ACB=\sqrt{1-\cos^2\angle ACB}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

である。 $AH=AB\sin\angle ABC=AC\sin\angle ACB$ だから $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\dfrac{4\sqrt{2}/9}{2\sqrt{2}/3}=\dfrac{2}{3}$

ここで $AB=2k\,,AC=3k$ とおけば

$$2k\times\frac{1}{3}+3k\times\frac{7}{9}=12\Rightarrow 3k=12\Rightarrow k=4, AB=8, AC=12$$

余弦定理より

$$AD^2=AB^2+BD^2-2\mathrm{AB}\cdot BD\cos\angle ABC=64+36-96\times\frac{1}{3}=68\Rightarrow AD=2\sqrt{17}$$

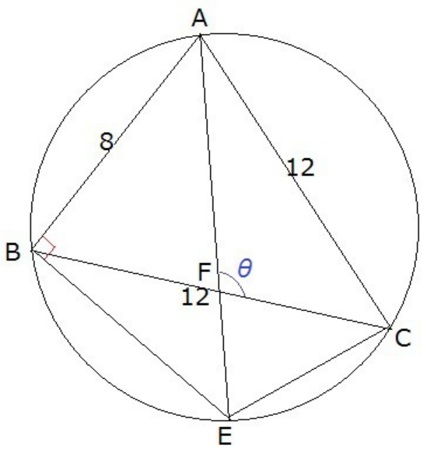
正弦定理より

$$2R=\frac{AC}{\sin}\angle ABC\Rightarrow R=\frac{12}{2\times(2\sqrt{2}/3)}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$\angle ABE=90^\circ$ だから AE は外接円の直径である。 $AE=2R=9\sqrt{2}$

円周角の定理を使って $\dfrac{BE}{AE}=\cos\angle AEB=\cos\angle ACB=\dfrac{7}{9}\Rightarrow BE=\dfrac{7}{9}\cdot 9\sqrt{2}=7\sqrt{2}$ であり、

$\dfrac{CE}{AE}=\cos\angle AEC=\cos\angle ABC=\dfrac{1}{3}\Rightarrow CE=\dfrac{1}{3}\cdot 9\sqrt{2}=3\sqrt{2}$



四角形の面積は $\triangle ABC+\triangle EBC$ だが、前者は二様の方法で求められる。すなわち

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC$$

これから

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=32\sqrt{2}\Rightarrow \sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(もっとも最後の式は二等辺三角形であることに気づけば $\sin A=\sin\angle ABC$ で分かる。)

一方、もう一つの三角形は

$$\triangle EBC=\frac{1}{2}BE\cdot CE\sin(180^\circ-A)=\frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=14\sqrt{2}$$

となって、四角形の面積は $32\sqrt{2}+14\sqrt{2}=46\sqrt{2}$

この四角形の面積を二様に表そう。点 F と4つの頂点を結んで、四角形を4分割する。

$FA=a\,,FB=b\,,FE=f\,,FC=c\,,\theta=\angle\ AFC$ とおけば、四角形の面積は

$$\frac{1}{2}ac\sin\theta+\frac{1}{2}ab\sin(180^\circ-\theta)+\frac{1}{2}be\sin\theta+\frac{1}{2}ec\sin(180^\circ-\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta(ac+ab+be+ec)=\frac{1}{2}\sin\theta(a+e)(b+c)=\frac{1}{2}\sin\theta\cdot AE\cdot BC$$

よって　$\frac{1}{2}\sin\theta(9\sqrt{2})\cdot 12=46\sqrt{2} \Rightarrow \sin\theta=\frac{23}{27}$

【答】アイ＝12、ウエ＝2／3、オ＝8、カキ＝12、クケコ＝2√17、サシス＝9√2／2、セソ＝7√2、タチ＝3√2、ツテト＝46√2、ナニヌネノ＝23／27

【第4問】(1)　$12.0 \div 9.9 = 1.21$　より　1.2

(2) 度数は左から　1,7,16,12,8,1,2 計47　である。中央値は　$\frac{1+47}{2}=24$　番目だから、左から3番目の階級に所属する。よって　$40 \leqq Q_2 < 44$　選択肢から選ぶと③しかない。

(3) (I) 箱の真ん中の太めの縦線に注目すれば、だんだん増えている傾向にある（絶対ではないが）。

(II) 最大値の最大は2011年で、最小は1996年で、その差は　$15.0-11.6=3.4>2$

(III) 第1四分位数は　$\frac{1+23}{2}=12$　番目，第3四分位数は　$\frac{25+47}{2}=36$　番目である。1996年では9は　Q_2　～　Q_3　の間にあるから9以下は24～35県ある。一方、2014年では9は　min　～　Q_1　の間にあるから9以下は1～11県ある。1996年の半分は12～17.5県になるから正しい。

(4) Yを見るとすべてが14未満だから、③はウソ。13以上14未満が存在するのに①ではないことになっているからウソ。あとは⓪か②だが、8以上9未満を数えてみると8県ある。これで選択肢は⓪しか残らない。

(5)　$\frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2}\sqrt{s_Y^2}}=\frac{1.75}{\sqrt{4.8\times 2.4}}=\frac{1.75}{\sqrt{11.52}}$　だが、表より　$\sqrt{11.52} \ll \frac{\sqrt{1156}}{10}=\frac{34}{10}=3.4$　だから1.75を3.4弱で割って　$\frac{1.75}{3.4}=0.514$　より少し大きい値。だから③の0.52である。

直線の式の傾きは　$\frac{s_{XY}}{s_X^2}=\frac{1.75}{4.8}=0.364$　で⓪の0.36である。y切片は

$\bar{y}-\frac{s_{XY}}{s_X^2}\times\bar{x}=\frac{1.75}{4.8}=10.2-0.36\times 9.6=6.744$　で⑥の6.74である。直線の式が

$y=0.36x+6.74$　となったので、　$x=4$　を代入して　$y=0.36\times 4+6.74=8.18$

【答】アイ＝1．2、ウ＝③、エ＝②、オ＝⓪、カ＝③、キ＝⓪、ク＝⑥、ケ＝⑦
