[I]　3次方程式 $(x-p)(x^2+qx+r)=0$（ただし，p, q, r は実数）を考え，方程式 $x^2+qx+r=0$ の解を α, β とする。p, α, β に対応する複素数平面上の点をそれぞれ P, A, B とするとき，次の問に答えよ。

(1) 3点 P, A, B が三角形をなすための p, q, r の条件を求めよ。

(2) (1) の条件の下で，三角形 PAB の面積 S を p, q, r で表せ。

(3) さらに，三角形 PAB の外接円の中心 Q および半径 R を p, q, r で表せ。

[II]　次の問に答えよ。

(1) xy 平面上の2直線 $x-y+1=0$, $3x+y-5=0$ と曲線 $x^2+2x+4y+5=0$ で囲まれる領域の面積を求めよ。

(2) (1) で考えた領域の点 (a, b) で境界上になく，a, b がともに整数であるものの個数を求めよ。

[III]　pを素数，a, b, cを整数とする。次の問に答えよ。

(1)　$\sqrt[3]{p}$が無理数になることを示せ。

(2)　$a(\sqrt[3]{p})^2+b\sqrt[3]{p}+c=0$ ならば，$ap+b(\sqrt[3]{p})^2+c\sqrt[3]{p}=0$ となることを示せ。

(3)　$a(\sqrt[3]{p})^2+b\sqrt[3]{p}+c=0$ ならば，$bc-a^2p+(b^2-ac)\sqrt[3]{p}=0$ となることを示せ。

(4)　$a(\sqrt[3]{p})^2+b\sqrt[3]{p}+c=0$ ならば，$a=b=c=0$ となることを示せ。

[IV]　次の問に答えよ。

(1)　関数 $f(x)=e^x(\cos x+\sin x)$ を微分せよ。

(2)　関数 $g(x)=e^{-\pi x}\sin \pi x$ を考える。

(i)　$g(x)$ の極値をすべて求めよ。

(ii)　$n-1 \leqq x \leqq n \ (n=1, 2, 3, \ldots)$ における $y=g(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V_n を求めよ。

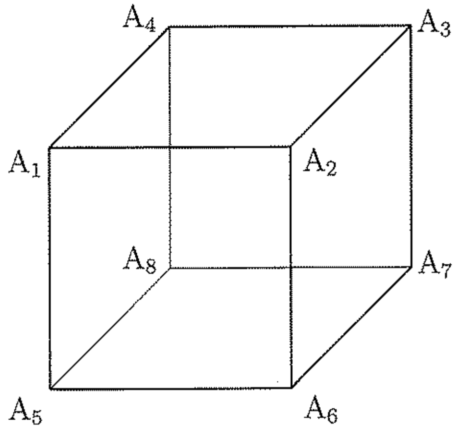
(iii)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ を求めよ。

[V]　立方体の8個の頂点を図のように $A_1, A_2, \ldots, A_8$ とする。この8点から無作為に4点を選び，それらを頂点とする四面体あるいは四角形をXとする。また，残りの4点から同様にしてできる図形をYとし，XとYの共通部分（交わってできる図形）をZとする。次の問に答えよ。ただし，(1)，(2) は答のみでよい。

(1) Xが A_1, A_3, A_6, A_8 を頂点とする四面体で，Yが A_2, A_4, A_5, A_7 を頂点とする四面体のとき，Zはどんな図形か。

(2) Xが A_1, A_2, A_3, A_7 を頂点とする四面体で，Yが A_4, A_5, A_6, A_8 を頂点とする四面体のとき，Zはどんな図形か。

(3) XとYが共通部分をもたない確率を p とし，XとYの共通部分Zが1点になる確率を q_0，線分になる確率を q_1，平面図形になる確率を q_2，立体図形になる確率を q_3 とする。p, q_0, q_1, q_2, q_3 を求めよ。



[以　下　余　白]