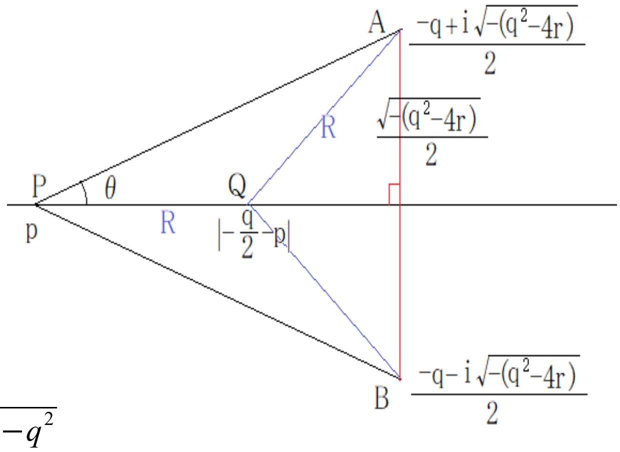
【I】(1) 実係数の 3 次方程式は、1 つの実数解と 1 組の共役複素数か、3 つの実数解を持つ。後者の場合は三角形にならない。前者ならよいかというと、1 つだけ例外があって複素共役な 2 数の実部が p になるとき (3 点が縦に一直線に並んでしまう) だ。よって

$$(q^2-4r<0)\wedge\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\neq p\right),$$

$$(q^2-4r<0)\wedge\left(-\frac{q}{2}\neq p\right)\quad(答)$$



(2) 2 つの直角三角形があるが、

底辺 $=\left|-\frac{q}{2}-p\right|$,

高さ $=\sqrt{4r-q^2}$

より、

$$S=\left(\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{q}{2}-p\right|\cdot\frac{\sqrt{4r-q^2}}{2}\right)\times 2=\frac{1}{2}\left|\frac{q}{2}+p\right|\sqrt{4r-q^2}$$

$$=\frac{1}{4}|2p+q|\sqrt{4r-q^2}\quad(答)$$

(3) $\angle APB=2\theta$ とおく。 $\tan\theta=\frac{\sqrt{4r-q^2}}{2}/\left|-\frac{q}{2}-p\right|=\frac{\sqrt{4r-q^2}}{|2p+q|}$ だから

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{4r-q^2}}{2\sqrt{p^2+pq+r}},\ \cos\theta=\frac{|2p+q|}{2\sqrt{p^2+pq+r}}$$

正弦定理より

$$R=\frac{AB}{2\sin 2\theta}=\frac{\sqrt{4r-q^2}}{2\times 2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sqrt{p^2+pq+r}^2}{|2p+q|}=\frac{p^2+pq+r}{|2p+q|}\quad(答)$$

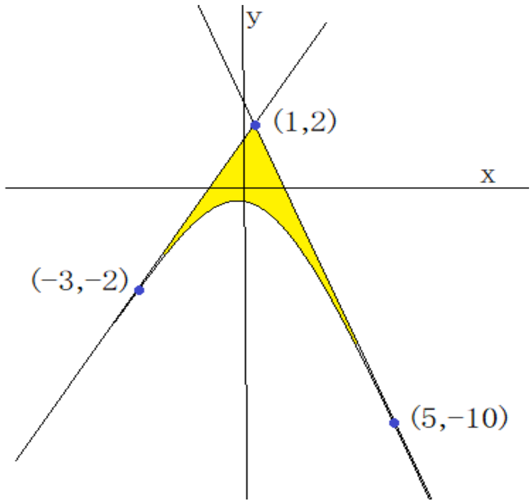
中心 Q は P より半径の分だけ横に飛んだ所にある。

ア) $p<-\frac{q}{2}$ のとき。 $Q=p+\frac{p^2+pq+r}{-(2p+q)}=\frac{p^2-r}{2p+q}$

イ) $p>-\frac{q}{2}$ のとき。 $Q=p-\frac{p^2+pq+r}{2p+q}=\frac{p^2-r}{2p+q}$

いずれにせよ $Q=\frac{p^2-r}{2p+q}$ (答)

【II】(1) 3 つの曲線のうちの 2 つの交点を各々求めて図を描く。放物線と直線の交点を求めるとき、いずれの直線も重解が出てくるので接していることが分かる。



面積は

$$S=\int_{-3}^{1}\{(x+1)-(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4})\}dx$$
$$+\int_{1}^{5}\{(-3x+5)-(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4})\}dx$$
$$=\int_{-3}^{1}\frac{1}{4}(x+3)^2dx+\int_{1}^{5}\frac{1}{4}(x-5)^2dx$$
$$=[\frac{1}{12}(x+3)^3]_{-3}^{1}+[\frac{1}{12}(x-5)^3]_{1}^{5}$$
$$=\frac{1}{12}(64-0)+\frac{1}{12}(0+64)=\frac{32}{3}$$ (答)

(2) $y_1=x+1\,,\ y_2=-3x+5,\ y_3=-\frac{1}{4}(x^2+2x+5)$ とおく。

ア) $x=-2$ のとき $y_3=-1.25,\ y_1=-1$ だから 0 個

イ) $x=-1$ のとき $y_3=-1,\ y_1=0$ だから 0 個

ウ) $x=0$ のとき $y_3=-1.25,\ y_1=1$ だから 2 個

エ) $x=1$ のとき $y_3=-2\,,\ y_1=y_2=2$ だから 3 個

オ) $x=2$ のとき $y_3=-3.25,\ y_2=-1$ だから 2 個

カ) $x=3$ のとき $y_3=-5,\ y_2=-4$ だから 0 個

キ) $x=4$ のとき $y_3=-7.25,\ y_2=-7$ だから 0 個

合計 7 個(答)

【III】(1)　$\sqrt[3]{p}=\dfrac{m}{n}$　とおく。ただし　m,n　は自然数である。このとき

$$p\,n^3=m^3$$

となるが、両辺を素因数分解したとき（重複を含めて）何個素数が含まれるかを考える。左辺には3で割って1余るだけあるが、右辺にはちょうど3の倍数だけの個数となる。これは不合理であるから、素数の3乗根は有理数でない。■

(2) 両辺に　$\sqrt[3]{p}$　を掛ければ分かる。■

(3)　$x=\sqrt[3]{p}$　とおけば　$x^3=p$　となることと、いま　$a\,x^2+b\,x+c=0$　であることに注意する。

$$bc-a^2\,p+(b^2-a\,c)\sqrt[3]{p}=b(b\,x+c)-a\,x(a\,x^2+c)$$

$$=b(a\,x^2+b\,x+c)-a\,x(a\,x^2+b\,x+c)=b\times0-a\,x\times0=0$$ ■

(4) 前問より　$bc-a^2\,p+(b^2-a\,c)\sqrt[3]{p}=0$　となる。ここで　$b^2-a\,c=0$　でなければ移項して割って　$\sqrt[3]{p}$　が有理数になってしまう。だから　$(b^2-a\,c=0)\wedge(bc-a^2\,p=0)$　である。よって

$$b^3=b^2\times b=(a\,c)b=a(b\,c)=a\times a^2\,p=a^3\,p$$

ここで　$a=0$　でなければ、またしても　$\sqrt[3]{p}$　が有理数になってしまう。したがって

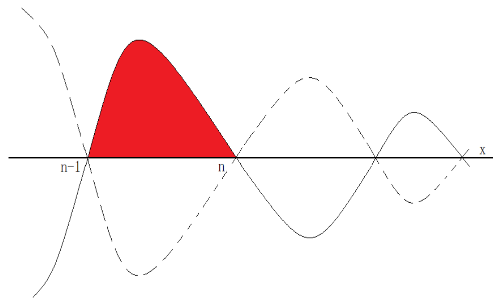
$$a=0\to b=0\to c=0$$ ■

【IV】(1)　$f'(x)=e^x(\cos x+\sin x)+e^x(-\sin x+\cos x)=2e^x\cos x$　(答)

(2) (i)　$g'(x)=-\pi e^{-\pi x}\sin\pi x+\pi e^{-\pi x}\cos\pi x=-\pi e^{-\pi x}(\sin\pi x-\cos\pi x)$
$=-\sqrt{2}\pi e^{-\pi x}\sin(\pi x-\frac{\pi}{4})$

臨界点は　$\pi x-\frac{\pi}{4}=n\pi\to x=n+\frac{1}{4}$　(n は整数)で、極値は

$$g(n+\frac{1}{4})=e^{-\pi(n+1/4)}\sin(n\pi+\frac{\pi}{4})=e^{-\pi(n+1/4)}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$　(答)



(ii)　$V_n=\pi\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}\sin^2\pi x\,dx$
$=\pi\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}\cdot\frac{1-\cos2\pi x}{2}dx$
$=\frac{\pi}{2}\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}dx-\frac{\pi}{2}\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}\cos2\pi x\,dx$

最終辺第 1 項は

$$\frac{\pi}{2}\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}dx=-\frac{1}{4}[e^{-2\pi x}]_{n-1}^{n}=\frac{1}{4}(e^{-2(n-1)\pi}-e^{-2n\pi})$$

第 2 項は部分積分より

$$I=\int e^{-2\pi x}\cos2\pi x\,dx=-\frac{1}{2\pi}e^{-2\pi x}\cos2\pi x-\int e^{-2\pi x}\sin2\pi x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2\pi}e^{-2\pi x}\cos2\pi x-(-\frac{1}{2\pi}e^{-2\pi x}\sin2\pi x+\int e^{-2\pi x}\cos2\pi x\,dx)$$
$$=-\frac{1}{2\pi}e^{-2\pi x}(\cos2\pi x-\sin2\pi x)-I\quad,$$
$$I=-\frac{1}{4\pi}e^{-2\pi x}(\cos2\pi x-\sin2\pi x)$$

よって

$$\frac{\pi}{2}\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}\cos2\pi x\,dx=-\frac{1}{8}[e^{-2\pi x}(\cos2\pi x-\sin2\pi x)]_{n-1}^{n}=\frac{1}{8}(e^{-2(n-1)\pi}-e^{-2n\pi})$$

したがって

$$V_n=\frac{1}{4}(e^{-2(n-1)\pi}-e^{-2n\pi})-\frac{1}{8}(e^{-2(n-1)\pi}-e^{-2n\pi})=\frac{1}{8}(e^{-2(n-1)\pi}-e^{-2n\pi})$$　(答)

(iii)　$\sum_{n=1}^{\infty}V_n=\frac{1}{8}\sum(e^{-2(n-1)\pi}-e^{-2n\pi})=\frac{1}{8}(\frac{1}{1-e^{-2\pi}}-\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}})=\frac{1}{8}$　(答)

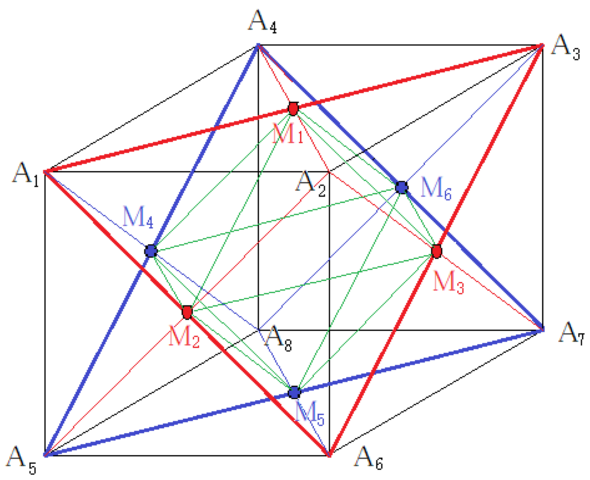
【V】(1) 右図参照。

Z は 2 平面　$A_1A_3A_6$　(手前側)と　$A_4A_5A_7$　(向こう側)の間に挟まれている。

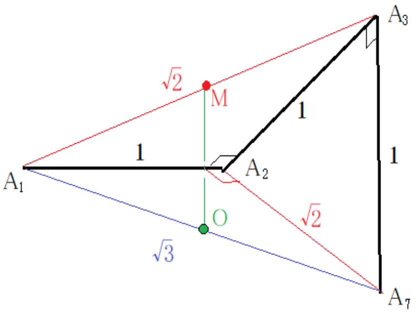
手前側の頂点　A_2　と向こう側の 3 頂点　A_4, A_5, A_7　を結ぶと手前側の平面と 3 つの面心　M_1, M_2, M_3　で交わる。

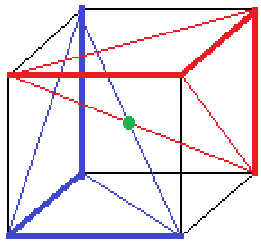
向こう側の頂点　A_8　についても同様のことを考えると、先とは異なる 3 つの面心　M_4, M_5, M_6　で交わる。

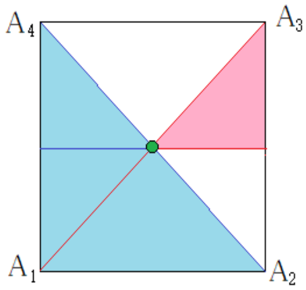
Z は 6 つの(すべての)面心を頂点とする立体だと分かる。それは正 8 面体である。(答)



(2) 立方体の 1 辺を 1 として、　$A_1A_2A_3A_7$　を下図(左)に描いた。ペアの立体とともに描いた見取図が下図(中)である。下図(右)は真上から見た平面図である。







立体　$A_1A_2A_3A_7$　において高さが 1/2 以下（体心以下）のところにピンク色を塗った。立体　$A_4A_5A_6A_8$　についても同様のところに水を塗った。2 つの立体が体心以下で重なり合う部分は、体心のみである。高さが 1/2 以上（体心以上）の場合も同然だから、Z は体心（立方体の中心）である。(答)

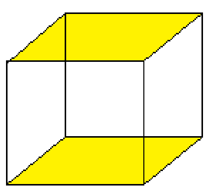
(3) 8 つの頂点を 4 つ＋4 つに分ける方法は 8 人の 4 人ずつのグループ分けと同じで、部屋割りしておいて部屋交換の個数 2! で割るのと同じで

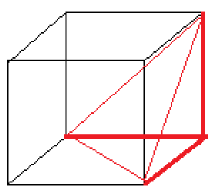
$${}_8C_4 \div 2! = 70 \div 2 = 35 \quad \text{通り。}$$

p　: 共通部分なしは、立方体のある面とその対面の場合(下図左)か、3 つの陵が 1 つの頂点に会してできる立体(下図右)の場合である。

前者が 3 通り、後者は会する点の取り方が 8 通りで、「部屋交換」の論理で÷2 だから 4 通りである。

$$p = \frac{3+4}{35} = \frac{1}{5} \quad \text{(答)}$$



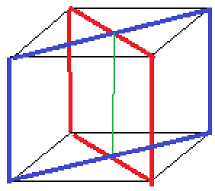


q_0　: Z が 1 点（体心のみ）は、(2) のような立体の場合である。

長さ 1 の 3 つの線分の真ん中の取り方が 12 通りで、サイドの長さ 1 の 2 つの線分の取り方が 2 通りで、÷2、だから　$12 \times 2 \div 2 = 12$　通り。

$$q_0 = \frac{12}{35} \quad \text{(答)}$$

q_1 :Z が線分は、右図のような X 字形の場合である。



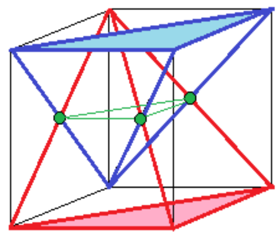
3 通りあるので、

$$q_1=\frac{3}{35} \quad (答)$$

q_2 :Z が平面図形はありない。それは、他の場合を総計すると 35 通りになることから分かる。

$$q_2=0 \quad (答)$$

q_3 :Z が立体図形は、(1) のような立体の場合か、右図のような立体である。右図を説明すると $1:1:\sqrt{2}$ の直角三角形と直角に位置する点の対蹠点の 4 点からなる立体で、ペアを作図した。ペアの立体は高さ 1/2 の水平面において、面心 2 点と体心の計 3 点から作られる三角形を共有する。水平面を上(下)に少しだけ動かしてもやはり平面図形(三角形)を共有するので、この立体のペアは空間図形を共有する。



(1) は、立方体の 1 つの面に対角線が 2 本あって、どちらか 1 本を選ぶとそれだけで 1 辺 $\sqrt{2}$ の正四面体が自動的に決まってしまう。よって $2\div2=1$ 通り。

右図の場合は、立方体の 1 つの面で $1:1:\sqrt{2}$ の直角三角形の選び方が 4 通りで、それを 6 面について考えるので、 $4\times6\div2=12$ 通り。

$$q_3=\frac{1+12}{35}=\frac{13}{35} \quad (答)$$

【蛇足】 厳密に言うとこの問題文から確率を求めることはできない。4 点の決め方が書かれていないからだ。ここでは 8 枚のカードからランダムに 4 枚抽出して、点を決めるものとして解答した。別の決め方としては、点 A_1 から出発してサイコロを振って出た目で x 軸方向に進むか、y 軸方向に進むか、z 軸方向に進むかを決める。(進めない場合はサイコロを振り直す。) このようにすると実現できない図形が出てきて、異なる解答を得る。

立方体をジャングルジムと見て、目をつむった人が鉄棒をたどりながら点をランダムに選ぶと考えてみました。これだと A_1 の次に例えば A_7 を選ぶことはできません。

【蛇足の蛇足】 1〜8 が書かれた 8 枚のカードなら無作為に選べるが、 A_1 〜 A_8 とすると点同士の位置関係があるので無作為に選ぶことはできず、選ぶ方法が明示されねばならない。他の例として、8 人の生徒を 4 人ずつの部屋に泊めることを考えてみよ。共学校であれば、無作為に決定することは不可能である。（男女同数のときしか部屋割りできないので、できたとしても 1 通りだ。）