【第 1 問】 $f'(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}-\sin x=\dfrac{\sin x-x\cos x-\sin^3 x}{\sin^2 x}$

$$=\frac{\sin x(1-\sin^2 x)-x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\cos x(\sin x\cos x-x)}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x(\sin 2x-2x)}{2\sin^2 x}$$

だが、 $0<t$ のとき $t>\sin t$ (t=0 で接することから分かる) ので、 $0<x<\pi$ における臨界点は $x=\dfrac{\pi}{2}$ のみである。これをもとに増減表を書く。

x	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π
f’		−	0	+	
f	2	↘	$\frac{\pi}{2}$	↗	∞

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x}+\cos x\right)=\lim\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}+\cos x\right)=\frac{1}{1}+1=2 \quad ,$$

$$\lim_{x\to\pi-0}\left(\frac{x}{\sin x}+\cos x\right)=\frac{\pi}{+0}+(-1)=\infty \quad (答)$$

【第 2 問】(1)　$a_n=\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!(n!)^2}$　だから

$$a_n\times\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{(2n+1)!}{(n+1)!(n!)^2}\times\frac{n!((n-1)!)^2}{(2n-1)!}=\frac{2n(2n+1)}{n+1}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{2(2n+1)}{n(n+1)}$$

ここで分母は連続する 2 数の積だから 2 で割り切れるので、約分して

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2n+1}{n(n+1)/2}$$

こうすれば既約分数である。なぜなら　$n=2k$　なら　$\dfrac{4k+1}{k(2k+1)}$　$n=2k-1$　なら　$\dfrac{4k-1}{k(2k-1)}$　だが、$(k,4k\pm1)$　の最大公約数は 1 であり (k の素因数を d として、後者はそれで割り切れないから)、$(2k\pm1,4k\pm1)=(2k\pm1,2(2k\pm1)\mp1)$　も最大公約数は 1 である。よって

$$p_n=\frac{n(n+1)}{2,}q_n=2n+1$$　(答)

(2)　a_n　の値を初項からいくつか求めてみよう。まず初項は　$a_1=\dfrac{{}_3C_1}{1!}=3$　で、その次からは所与の一般項より漸化式

$$a_n=a_{n-1}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=a_{n-1}\times\frac{2n+1}{n(n+1)/2}$$

で求める方が早い。

$$a_2=a_1\times\frac{5}{2\cdot3/2}=3\times\frac{5}{3}=5\quad,$$
$$a_3=a_2\times\frac{7}{3\cdot4/2}=5\times\frac{7}{6}=\frac{35}{6}\quad,$$
$$a_4=a_3\times\frac{9}{4\cdot5/2}=\frac{35}{6}\times\frac{9}{10}=\frac{21}{4}\quad,$$
$$a_5=a_4\times\frac{11}{5\cdot6/2}=\frac{21}{4}\times\frac{11}{15}=\frac{77}{20}\quad,$$
$$a_6=a_5\times\frac{13}{6\cdot7/2}=\frac{77}{20}\times\frac{13}{21}=\frac{143}{60}\quad,$$
$$a_7=a_6\times\frac{15}{7\cdot8/2}=\frac{143}{60}\times\frac{15}{28}=\frac{143}{112}\quad,$$
$$a_8=a_7\times\frac{17}{8\cdot9/2}=\frac{143}{112}\times\frac{17}{36}=\frac{2431}{4032}<1$$

これで 1 未満になった。これ以降は倍率が 1 未満だから、　a_n　も 1 未満になって整数にはならない。実際、n >4　ならば　$\dfrac{1}{2}n(n+1)-(2n+1)=\dfrac{1}{2}\left(n-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{17}{8}>0$　より

$$\frac{2n+1}{n(n+1)/2}<1$$

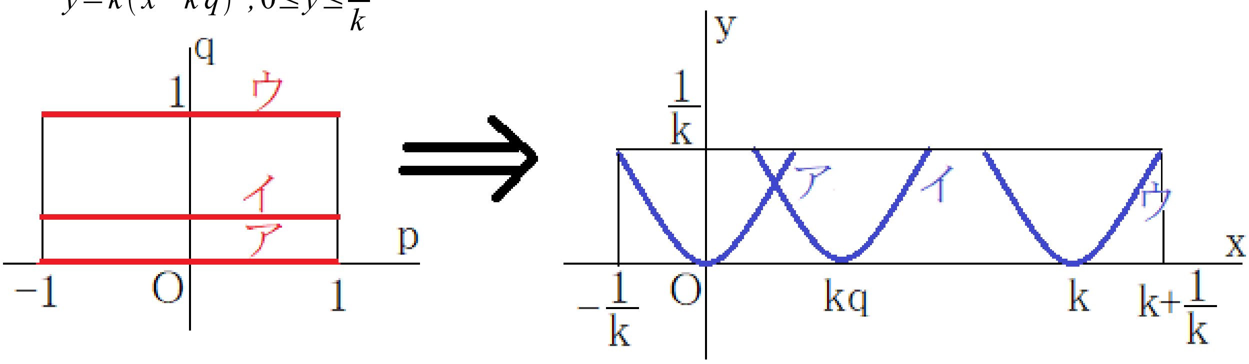
である。整数になるのは　$n=1,2$　(答)

【第3問】 $P=(p,p^2), Q=(q,0), -1\le p\le 1, 0\le q\le 1$ とし、 $R=(x,y)$ とおけば

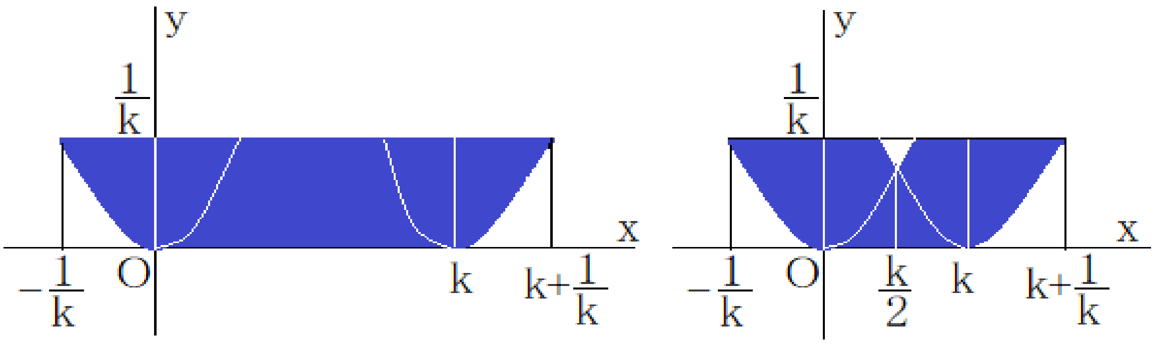
$$(x,y)=\frac{1}{k}(p,p^2)+k(q,0)$$

だから $x=\frac{p}{k}+kq,\ y=\frac{p^2}{k}$ で、p を消去すると

$$y=k(x-kq)^2,\ 0\le y\le\frac{1}{k}$$



上図のように写像される。移った先の図形の面積だが、図形が横に長いか短いかで形が変わる。



ア) 長い場合。 $2\times\frac{1}{k}\le k\Leftrightarrow\sqrt{2}\le k$ のとき、面積は

$$S(k)=2\int_0^{1/k}\left(\frac{1}{k}-kx^2\right)dx+\frac{1}{k}\times k=\left[\frac{2}{k}x-\frac{2k}{3}x^3\right]_0^{1/k}+1=\frac{4}{3k^2}+1 \quad (答)$$

イ) 短い場合。 $0<k<\sqrt{2}$ のとき、面積は

$$S(k)=\frac{4}{3k^2}+1-2\int_{k/2}^{1/k}\left(\frac{1}{k}-kx^2\right)dx=\frac{4}{3k^2}+1-\left[\frac{2}{k}x-\frac{2k}{3}x^3\right]_{k/2}^{1/k}=2-\frac{k^4}{12} \quad (答)$$

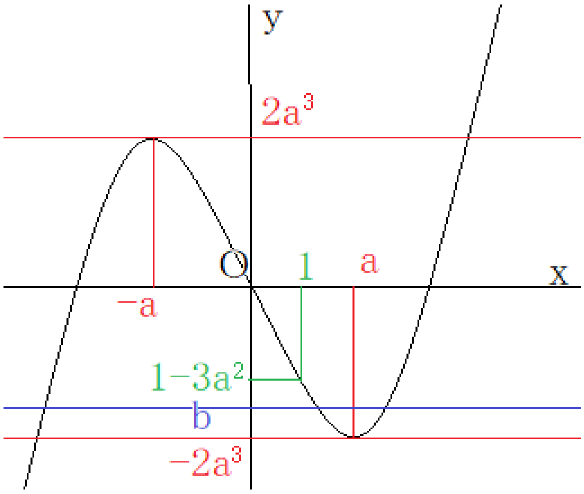
極限は

$$\lim_{k\to+0}S(k)=\lim\left(2-\frac{k^4}{12}\right)=2-\frac{0}{12}=2 \quad ,$$

$$\lim_{k\to\infty}S(k)=\lim\left(\frac{4}{3k^2}+1\right)=0+1=1 \quad (答)$$

【第4問】 $f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$ より増減表とグラフをかく。

x	…	−a	…	a	…
f’	+	0	−	0	+
f	↗	$2a^3$	↘	$-2a^3$	↗



条件1より

$-2a^3<b<2a^3$ ①

条件2を満たすためには

$1<a$ ②

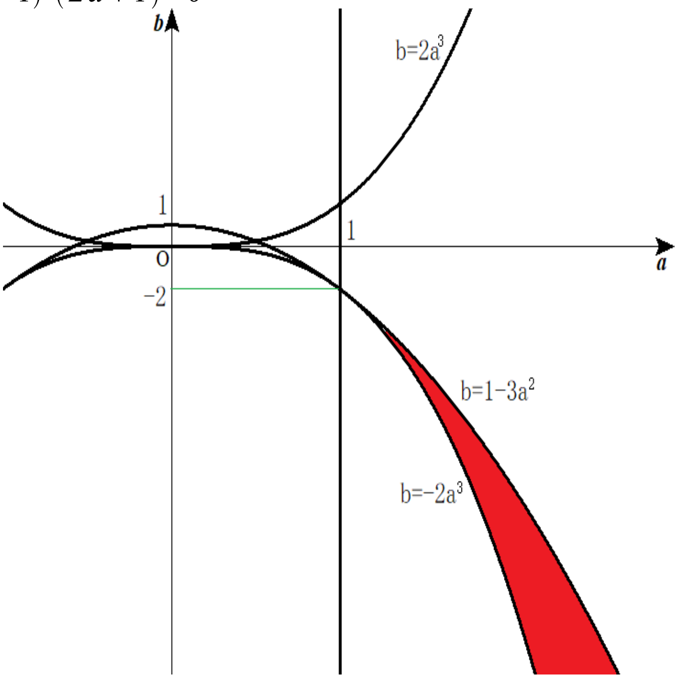
$-2a^3<b<f(1)=1-3a^2$ ③

である。図示するにあたって $b=-2a^3, b=1-3a^2$ の2つのグラフの位置関係に注意しよう。

$-2a^3=1-3a^2 \to 2a^3-3a^2+1=0 \to (a-1)^2(2a+1)=0$

だから a=1 で接する。

(答) 右図、赤色部分(境界は含まない)。



【第５問】(1)　z の偏角を θ とすれば

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

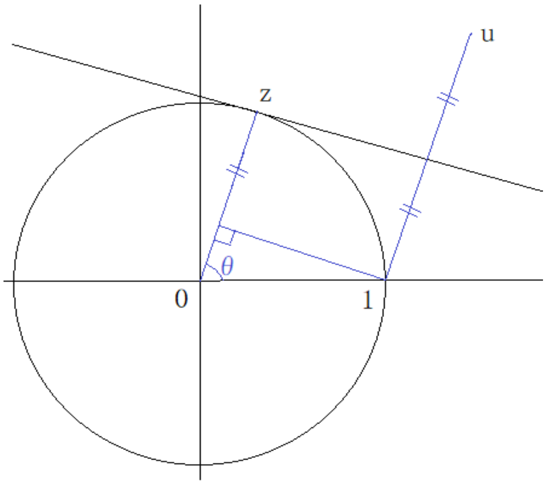
だから、

$$u=1+2(1-\cos\theta)z$$

である。ところで $|z|^2=z\bar{z}=1$ だから

$$\frac{1}{z}=\bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta\quad,$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



よって

$$u=1+2z-2\cos\theta\cdot z=1+2z-\left(z+\frac{1}{z}\right)z$$

$$=2z-z^2\quad(\text{答})$$

また $\dfrac{\bar{w}}{w}=\dfrac{1-u}{1-\bar{u}}=\dfrac{1-2z+z^2}{1-2\bar{z}+\bar{z}^2}$ だが、ここに $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$ を代入して

$$\frac{\bar{w}}{w}=\frac{1-2z+z^2}{1-\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}}=z^2\times\frac{1-2z+z^2}{z^2-2z+1}=z^2\quad(\text{答})$$

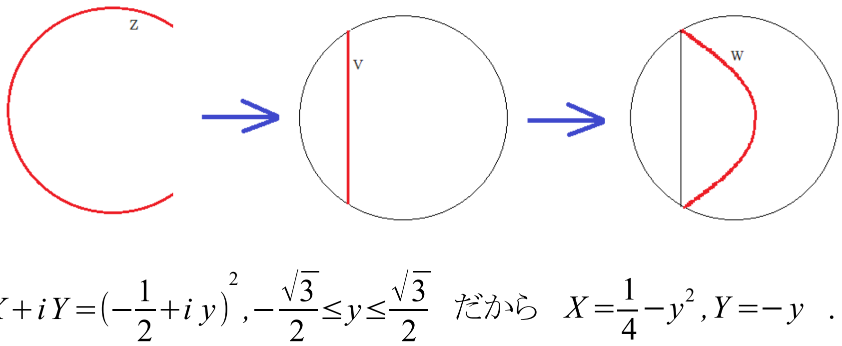
また

$$\frac{|w+\bar{w}-1|}{|w|}=\left|\frac{w+\bar{w}-1}{w}\right|=\left|1+\frac{\bar{w}}{w}-\frac{1}{w}\right|=\left|1+z^2-(1-u)\right|=\left|z^2+2z-z^2\right|=2|z|=2\quad(\text{答})$$

(2)　$w=\dfrac{1}{1-u}=\dfrac{1}{1-(2z-z^2)}=\dfrac{1}{(z-1)^2}$ という写像について考えるのだが、

$z\to v=\dfrac{1}{z-1}\to w=v^2$ というように２段階に分けて考える。

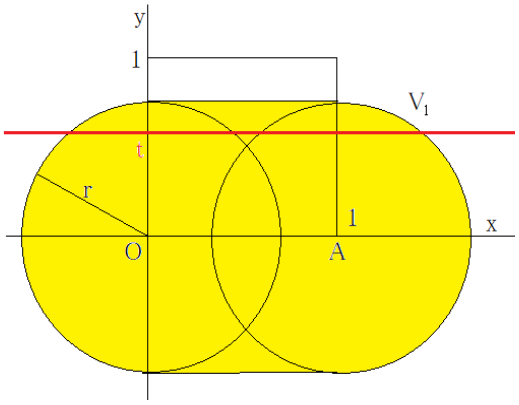
ア)　$z=\dfrac{1}{v}+1=\dfrac{v+1}{v}$ を $z\bar{z}=1$ に代入して $(v+1)(\bar{v}+1)=v\bar{v}\to\dfrac{v+\bar{v}}{2}=-\dfrac{1}{2}$ で実部が -1/2（虚軸に平行な直線）。変域は $\dfrac{z+\bar{z}}{2}\leq\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{v+1}{v}+\dfrac{\bar{v}+1}{\bar{v}}=\dfrac{2v\bar{v}+v+\bar{v}}{v\bar{v}}\leq 1\to v+\bar{v}\leq-|v|^2$ ，すなわち $|v|^2\leq 1$（単位円内）

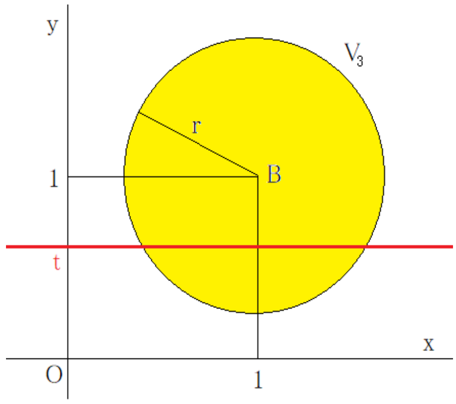


イ)　$w=v^2,\ X+iY=\left(-\dfrac{1}{2}+iy\right)^2,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leq y\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ だから $X=\dfrac{1}{4}-y^2,\ Y=-y$ ．よって

$$X=\frac{1}{4}-Y^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq Y\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ （横にオネンネした放物線の一部）(答)

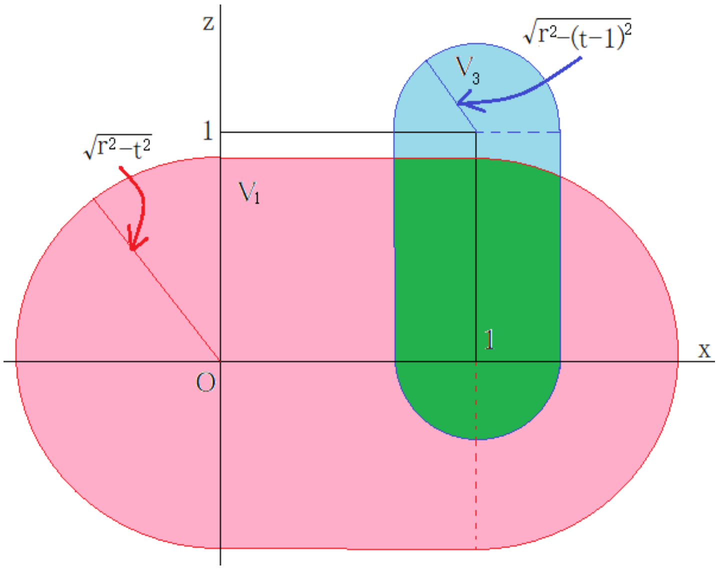
【第 6 問】(1) 真上から見た平面図を描く。





V_1 とぶつかるには $-r \leq t \leq r$, V_3 とぶつかるには $1-r \leq t \leq 1+r$ だから共通部分をとって $1-r \leq t \leq r$ (答)

V_1 の切り口は、半円＋長方形＋半円だが、半円の半径は $\sqrt{r^2-t^2}$, V_3 の切り口の半円の半径は $\sqrt{r^2-(1-t)^2}$ だから、x 軸上遠方から眺めた立面図は下の通り。(答)



(2) V_2 を平面 $y=t\,(1-r \leq t \leq r)$ で切断したときにできる断面(中心 $(1, t, 0)$, 半径 r の円)に、上図緑色部分が含まれればよい。点 $(1, t, 0)$ から緑の左上の端点までの距離が

$$\sqrt{\sqrt{r^2-t^2}^2+\sqrt{r^2-(t-1)^2}^2}=\sqrt{2r^2-2t^2+2t-1} \leq r$$

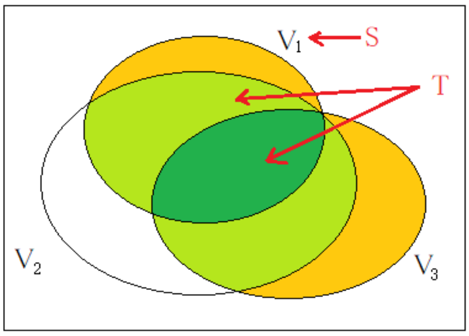
となればよいから、 $r^2 \leq 2t^2-2t+1$ が $1-r \leq t \leq r$ なるすべての t について成り立てばよい。言い換えると、 $r \leq \sqrt{2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$ が t の値がどうあろうが成り立つ、最悪 $t=\frac{1}{2}$ になっても成り立てばよい。よって $r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (答)

(3) 立体 V の体積を $|V|$ で表す。 $V_1 \cap V_3 \subset V_2$ ならベン図は右図。

$$|V_1 \cup V_2 \cup V_3|=|V_1 \cup V_2|+|V_2 \cup V_3|-|V_2|$$

で、 $|V_1 \cup V_2|=|V_2 \cup V_3|=S+S-T$ だから

$$|V_1 \cup V_2 \cup V_3|=2(2S-T)-S=3S-2T \quad \text{(答)}$$



(4)　V_1　は半球＋円柱＋半球だから、

$$S=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2$$

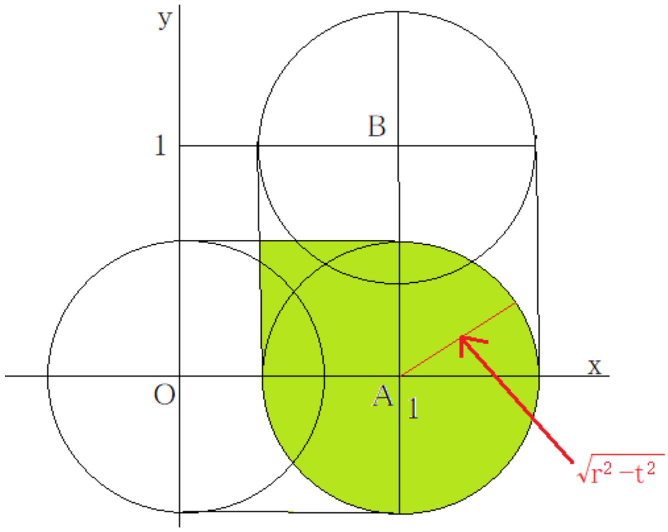
$V_1\cap V_2$　を等高面で切断して真上から見た平面図を描こう。O, A, B における球はそれぞれ

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\ (x-1)^2+y^2+z^2=r^2,\ (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=r^2$$

で、等高面　$z=t$　で切った切り口はそれぞれ

$$x^2+y^2=r^2-t^2,\ (x-1)^2+y^2=r^2-t^2,\ (x-1)^2+(y-1)^2=r^2-t^2$$

という半径の等しい円になる。緑色の図形(正方形＋円の 3/4) の面積を積分する。



$$T=2\int_0^r\left\{r^2-t^2+\frac{3}{4}\pi(r^2-t^2)\right\}dt$$

$$=2\left[\left(1+\frac{3}{4}\pi\right)r^2t-\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{4}\pi\right)t^3\right]_0^r$$

$$=2\left(1+\frac{3}{4}\pi\right)r^3-\frac{2}{3}\left(1+\frac{3}{4}\pi\right)r^3$$

$$=\frac{4}{3}r^3+\pi r^3$$

したがって

$$V=3S-2T$$

$$=3\left(\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2\right)-2\left(\frac{4}{3}r^3+\pi r^3\right)$$

$$=2\pi r^3+3\pi r^2-\frac{8}{3}r^3\quad\text{(答)}$$