【1】(1) 2 式から y を消去すると

$$x^2+(x-a)^2+b=0\to 2x^2-2ax+(a^2+b)=0$$

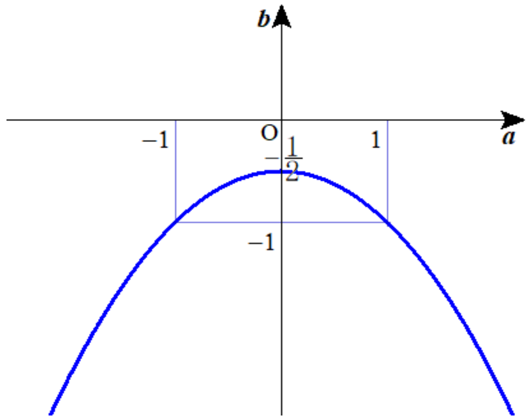
2つの解を　α,β　とする。解と係数の関係から

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-4\cdot\frac{a^2+b}{2}=-a^2-2b=1\quad(*)$$

これが実数解でないと駄目だが　$\frac{D}{4}=a^2-2(a^2+b)=-a^2-2b\geq 0$　だから、大丈夫だ。

(*) より　$b=-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}$

(答)右図



(2) 2 交点を通る曲線の方程式は

$$k\{(x-a)^2+b-y\}+l(-x^2-y)=0$$

だが、これが1次式になればよいから　$k=l=1$

$$-2ax+a^2+b-2y=0$$

これが 2 点を結ぶ直線だ。前問の答を代入して

$$-2ax+a^2-(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2})-2y=0$$

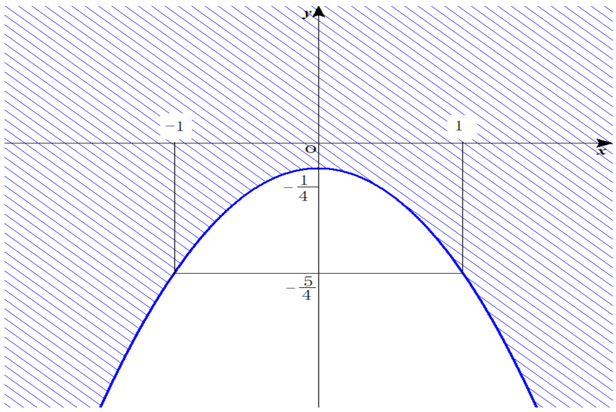
変形して

$$a^2-4xa-(4y+1)=0$$

a は実数だから

$$\frac{D}{4}=4x^2+(4y+1)\geq 0\to y\geq -x^2-\frac{1}{4}$$

(答)右図の斜線部分（境界含む）



【2】(1) 1 回めくっただけで n 以上になるのは n の札を選ぶときだけだから

$$p(1)=\frac{1}{n} \quad (答)$$

n 回めくって初めて n 以上になるのはそれまで 1 の札しか出ないときだから

$$p(n)=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\times 1=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \quad (答)$$

(2) (1 回目, 2 回目) が

$$(1,k\geq n-1),(2,k\geq n-2),(3,k\geq n-3),\cdots,(n-1,k\geq 1)$$

となればよいから、場合の数は

$$2+3+4+\cdots+n=\frac{(n-1)(n+2)}{2} \quad ,$$

全体の場合の数が $n\times n=n^2$ だから、 $P(2)=\dfrac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$ (答)

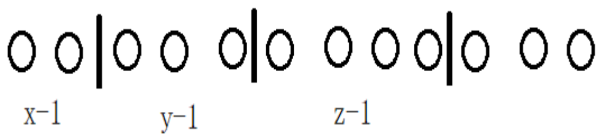
(3) 3 回めくっても和が n 未満なのは

$$x+y+z<n(1\leq x,y,z\leq n)$$

を満たすことである。これが何通りあるかというと

$$(x-1)+(y-1)+(z-1)\leq n-4$$

より、 $n-4$ 個のまんじゅうと 3 枚の仕切り板を 1 列に並べる場合の数に等しく、



$$_{n-1}C_3=\frac{(n-1)!}{3!(n-4)!}=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \quad 通り$$

である。これは $n=3$ のときにも成り立つ。

よって余事象の確率により、3 回以内に n 以上になる確率は

$$p(1)+p(2)+p(3)=1-\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)/n^3 \quad ,$$

求めるべき確率は

$$p(3)=1-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6n^3}-\frac{1}{n}-\frac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$$

$$=\frac{2n^3-3n^2-5n+6}{6n^3}=\frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{6n^3} \quad (答)$$

【3】(1)　$a=0$ だと $1-2^b=1\to 2^b=0$ でなければならないから、 $a\neq 0$.

$b=0$ だと $3^a-1=1\to 3^a=2$ でなければならないがこれは不可能だから、 $b\neq 0$.

$a<0,b>0$ だと $\dfrac{1}{3^{a'}}-2^b=1\to 1-3^{a'}2^b=3^{a'}$ だが、右辺が 3 で割り切れて左辺はそうでないからありえない。

$a>0,b<0$ だと $3^a-\dfrac{1}{2^{b'}}=1\to 3^a2^{b'}-1=2^{b'}$ だが、右辺が 2 で割り切れて左辺はそうでないからありえない。

最後に、 $a<0,b<0$ だと $\dfrac{1}{3^{a'}}-\dfrac{1}{2^{b'}}=1\to 2^{b'}-3^{a'}=3^{a'}2^{b'}$ だが、右辺が 2 で割り切れて左辺はそうでないからありえない。

したがって $a>0,b>0$ である。■

(2)　$b=2+c,c\geq 0$ とおけば $2^b+1=2^{2+c}+1=4\times 2^c+1$ は 4 で割って 1 余る数である。

一方、 3^a を $mod.4$ で考えると

$a=2k$ (偶数)ならば $3^a=3^{2k}=(3^2)^k=9^k\equiv 1^k=1(mod.4)$,

$a=2k+1$ (奇数)ならば $3^a=3^{2k+1}\equiv 1\times 3^1=3(mod.4)$.

いま $3^a=2^b+1\equiv 1(mod.4)$ であるから a は偶数でなければならない。■

(3) 実は(1), (2) の証明では必要条件だけ求めて、「両方正でなければならぬ」、「偶数でなければならぬ」までは示せたが、逆にホントにそういう場合が存在するかを言っていなかった。それをここで言う。

ア) $b=1\to 3^a=3\to a=1$ で $(a,b)=(1,1)$

イ) $b=2+c,c\geq 0$ ならば $3^{2k}=4\times 2^c+1$ だから

$(3^k-1)(3^k+1)=4\times 2^c, c\geq 0, k>0$ (*)

素因数分解を考えれば分かるように $3^k-1=1,2,2^2,2^3,\cdots$

イ-1) $3^k-1=1$ はありえない。

イ-2) $3^k-1=2$ だと $k=1,a=2k=2,c=1,b=2+c=3,(a,b)=(2,3)$

$3^k+1=4$ で計算は合う。

イ-3) $3^k-1=2^2,2^3,\cdots$ だと(2) で証明したように $k=2k'$ (偶数)である。(*)より

$3^{2k'}-1=2^{c'+2}, 3^{2k'}+1=2^{c-c'}$

第 2 式を $mod.4$ で考えると

左辺は $k'=1,2,3,\cdots$ に応じて $3^{2k'}+1\equiv 2,2,2,\cdots$ ($9^{k'}\equiv 1^{k'}\equiv 1$ だから当然),

右辺は $c-c'=4,5,6,\cdots$ に応じて $2^{c-c'}\equiv 0,0,0,\cdots$ ($c-c'\neq 0,1$ だから当然)

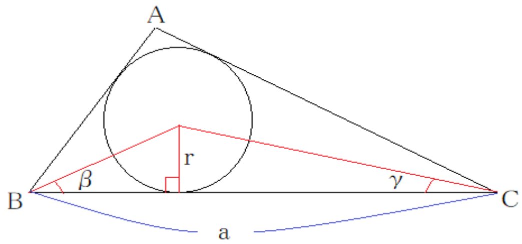
で両辺が合同($mod.4$)にならず、解は見つからない。

結局、解があるのはア) とイ-2) の $(a,b)=(1,1),(2,3)$ (答)

【蛇足】(3) が出題されなかったとして、(1), (2) の証明を書いて実際に条件を満たす (a,b) が存在しなかったら上記の証明はマチガイとなるのだろうか。

そんなことはない。 (a,b) が存在しなかったら、それを前提する命題はすべて真となる。（偽を仮定すると結論は真でも偽でも、P⇒Q は正しい命題になる。）だから、上の証明でよいのである。

【4】(1) 右図から分かるように



$$a=r\tan(\pi-\beta)+r\tan(\pi-\gamma)$$
$$=r\left(\frac{1}{\tan\beta}+\frac{1}{\tan\gamma}\right)=r\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$$
$$=r\cdot\frac{\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$
$$=r\cdot\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

よって $r=\dfrac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$. 一方、正弦定理より $2R=\dfrac{a}{\sin 2\alpha}$ より $R=\dfrac{a}{2\sin 2\alpha}$ だから

$$h=\frac{r}{R}=\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}\times\frac{2\sin 2\alpha}{a}=\frac{2\sin\beta\sin\gamma\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}$$

ところで $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(\beta+\gamma)\right)=\sin(\beta+\gamma)$ だから

$$h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \quad ■$$

(2) どこが直角でも同様(対称式だから) $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ とすると $\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ だから

$$h=4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=2\sqrt{2}\times\left\{-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right\}$$ (積を和差に直す公式)

$$=-\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=-1+\sqrt{2}\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{4}\right) ,$$

ところで $0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$ より $-1+\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0<h\leq -1+\sqrt{2}$ ■

等号成立は今の場合は $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}, 2\beta-\dfrac{\pi}{4}=0, 2\beta=\dfrac{\pi}{4}, 2\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ だが、対称性から 1 角が 90°で残りの 2 角が 45°と分かる。すなわち直角二等辺三角形である。(答)

(3) $h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-(\beta+\gamma)\right)\times\left\{-\dfrac{1}{2}(\cos(\beta+\gamma)-\cos(\beta-\gamma))\right\}$

$$=-2\cos(\beta+\gamma)\times\{\cos(\beta+\gamma)-\cos(\beta-\gamma)\} ,$$

$x=\beta+\gamma, y=\beta-\gamma$ は独立に動くので置き換えて平方完成すれば

$$h=-2\cos x(\cos x-\cos y)=-2\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos y\right)^2+\frac{1}{2}\cos^2 y\leq\frac{1}{2}\cos^2 y\leq\frac{1}{2} \quad ■$$

2 つの不等号のうち 2 つとも等号が成立すれば $h=\dfrac{1}{2}$ になる。その条件は

$$\cos x=\frac{1}{2}\cos y, \cos y=1\left(x=\beta+\gamma, y=\beta-\gamma, 0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}\right)$$

だから

$$y=0, \beta=\gamma, x=\beta+\gamma=\frac{\pi}{3} ,$$

よって $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{6}$ であって、正三角形である。(答)

【5】(1) ①を α の方程式であると解釈し直す。

$$\alpha=\frac{x^2+2i}{z}=z+\frac{2i}{z} \quad (*)$$

$z=x+yi, \alpha=a+bi$ とおく。いま $z=x$ (実数) だから

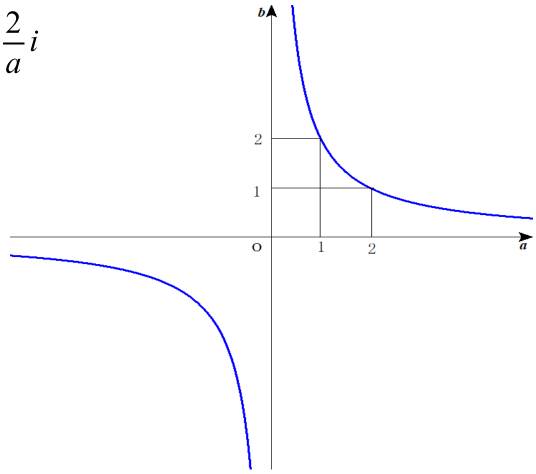
$$a+bi=x+\frac{2}{x}i \to a=x, b=\frac{2}{x} \to ab=2$$

よって α は直角双曲線上の点である。逆に α が直角双曲線上の任意の点であれば①は実数解 z を持つ。実際、 $ab=2$ であれば①は

$$z^2-(a+\frac{2}{a}i)z+2i=0 \to (z-a)(z-\frac{2}{a}i)=0 \to z=a, \frac{2}{a}i$$

でたしかに実数解を1つ持つ。

(答)右図の直角双曲線。



(2) (*)より

$$\alpha=z+\frac{2i\bar{z}}{z\bar{z}}=z+2i\bar{z}=(x+2y)+(2x+y)i \quad ,$$

45°回転して

$$\beta=\alpha(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\alpha\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

だから

$$\beta=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\{(x+2y)+(2x+y)i\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(-x+y)+(3x+3y)i\} \quad .$$

$\beta=c+di$ とおけば

$$c=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y), d=\frac{1}{\sqrt{2}}(3x+3y)$$

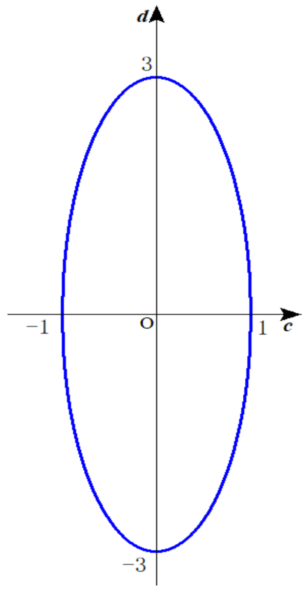
これを逆に解いて

$$x=\frac{\sqrt{2}}{6}(-3c+d), y=\frac{\sqrt{2}}{6}(3c+d)$$

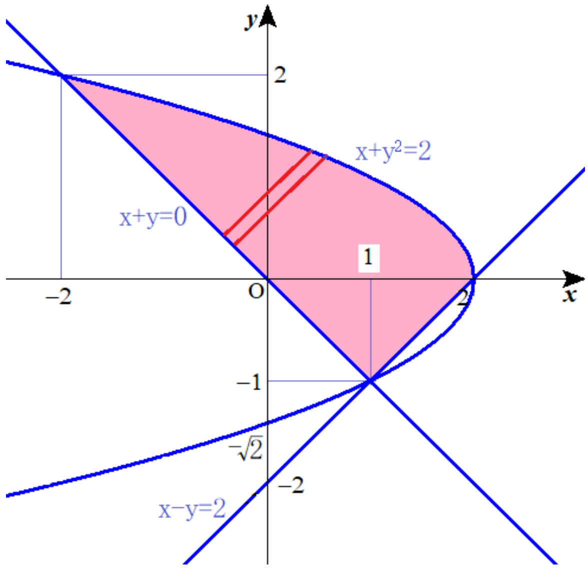
を $x^2+y^2=1$ に代入すれば

$$\frac{1}{18}(18c^2+2d^2)=1 \to c^2+\frac{d^2}{3^2}=1$$

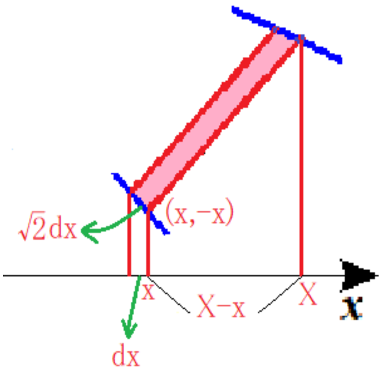
(答)右図の楕円。



【6】(1) (答)右図のピンク部分(境界を含む。)



(2) 直線　$y=-x$　に垂直な直線(右図中の赤線)で細断したものを回転して積分する。
下図はスライス図形の拡大図である。



直線上の点　$(x,-x)$　を通る法線(赤線)は　$Y=X-2x$　で、それと放物線　$X+Y^2=2$　との交点の　X　座標は

$$X+(X-2x)^2=2 \to X^2-(4x-1)X+(4x^2-2)=0\ ,$$

$$X=\frac{4x-1+\sqrt{(4x-1)^2-4(4x^2-2)}}{2}=\frac{4x-1+\sqrt{9-8x}}{2}$$

よって上図のスライス図形(ほぼ長方形)の縦、横の長さは

$$\sqrt{2}(X-x)=\frac{2x-1+\sqrt{9-8x}}{\sqrt{2}}\quad ,\quad \sqrt{2}\,dx$$

である。よって回転体の体積は

$$V=\pi\int_{-2}^{1}\left(\frac{2x-1+\sqrt{9-8x}}{\sqrt{2}}\right)^2\sqrt{2}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{1}\{4x^2-12x+10+2(2x-1)\sqrt{9-8x}\}\,dx$$

$\sqrt{\ }$ の部分の積分だけやっておくと　$9-8x=t\,,\,x=\frac{9-t}{8}$　と置換して

$$\int(2x-1)\sqrt{9-8x}\,dx=\int\frac{5-t}{4}\sqrt{t}\left(-\frac{1}{8}\right)dt=\int\frac{1}{32}\sqrt{t}(t-5)\,dt=\frac{1}{32}\left(\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}-\frac{10}{3}t\sqrt{t}\right)+C$$

$$=\frac{1}{32}\left\{\frac{2}{5}(9-8x)^2\sqrt{9-8x}-\frac{10}{3}(9-8x)\sqrt{9-8x}\right\}+C$$

である。よって先の計算の続きは

$$V=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{4}{3}x^3-6x^2+10x+\frac{1}{16}\left\{\frac{2}{5}(9-8x)^2\sqrt{9-8x}-\frac{10}{3}(9-8x)\sqrt{9-8x}\right\}\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left\{12+18+30+\frac{1}{16}\left(-\frac{6248}{5}+\frac{1240}{3}\right)\right\}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(60-\frac{784}{15}\right)=\frac{116\pi}{15\sqrt{2}}\quad \text{(答)}$$