

1

(30 点)

0 でない実数  $a, b, c$  は次の条件(i)と(ii)を満たしながら動くものとする.

(i)  $1 + c^2 \leq 2a$ .

(ii) 2つの放物線  $C_1: y = ax^2$  と  $C_2: y = b(x-1)^2 + c$  は接している.

ただし, 2つの曲線が接するとは, ある共有点において共通の接線をもつことであり, その共有点を接点という.

(1)  $C_1$  と  $C_2$  の接点の座標を  $a$  と  $c$  を用いて表せ.

(2)  $C_1$  と  $C_2$  の接点が動く範囲を求め, その範囲を図示せよ.

2

(30 点)

$n^3 - 7n + 9$  が素数となるような整数  $n$  をすべて求めよ.

3

(35 点)

$\alpha$  は  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  を満たす定数とし, 四角形 ABCD に関する次の 2つの条件を考える.

(i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する.

(ii)  $\angle ABC = \angle DAB = \alpha$ .

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで, 4 辺の長さの積

$$k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$$

が最大となるものについて,  $k$  の値を求めよ.

4

(35 点)

コインを  $n$  回投げて複素数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  を次のように定める.

- (i) 1 回目に表が出れば  $z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  とし、裏が出れば  $z_1 = 1$  とする.
- (ii)  $k = 2, 3, \dots, n$  のとき、 $k$  回目に表が出れば  $z_k = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} z_{k-1}$  とし、裏が出れば  $z_k = \overline{z_{k-1}}$  とする. ただし、 $\overline{z_{k-1}}$  は  $z_{k-1}$  の共役複素数である.

このとき、 $z_n = 1$  となる確率を求めよ.

5

(35 点)

曲線  $y = \log x$  上の点  $A(t, \log t)$  における法線上に、点  $B$  を  $AB = 1$  となるようにとる. ただし  $B$  の  $x$  座標は  $t$  より大きいとする.

- (1) 点  $B$  の座標  $(u(t), v(t))$  を求めよ. また  $\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)$  を求めよ.
- (2) 実数  $r$  は  $0 < r < 1$  を満たすとし、 $t$  が  $r$  から  $1$  まで動くときに点  $A$  と点  $B$  が描く曲線の長さをそれぞれ  $L_1(r), L_2(r)$  とする. このとき、極限  $\lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r))$  を求めよ.

6

(35 点)

四面体  $ABCD$  は  $AC = BD, AD = BC$  を満たすとし、辺  $AB$  の中点を  $P$ 、辺  $CD$  の中点を  $Q$  とする.

- (1) 辺  $AB$  と線分  $PQ$  は垂直であることを示せ.
- (2) 線分  $PQ$  を含む平面  $\alpha$  で四面体  $ABCD$  を切って 2 つの部分に分ける. このとき、2 つの部分の体積は等しいことを示せ.

問題は、このページで終わりである.