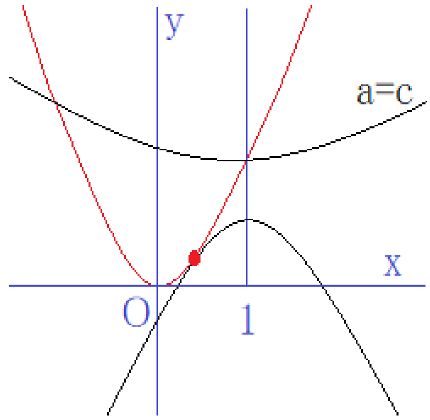
【1】(1) 接点を (X, Y) とする。これが 2 曲線上にあることから

$$Y = aX^2 = b(X-1)^2 + c \quad ,$$

$$(a-b)X^2 + 2bX - (b+c) = 0 \quad ①$$



またその点での接線の傾きが等しいから

$$2aX = 2b(X-1) \rightarrow aX = b(X-1)$$

$$(a-b)X = -b \quad ②$$

この 2 式から X を消去しよう。

①から $a-b \neq 0$ (=0 だと b=0 になるから) で割って

$$X = \frac{-b}{a-b}$$

これを①に代入して $\frac{-b^2}{a-b} = b + c \rightarrow ab - bc + ac = 0 \rightarrow (c-a)b = ac$ ここで $c - a \neq 0$ (=0 だと ac=0 になるから) で割って $b = \frac{ac}{c-a}$. したがって $X = \frac{-\frac{ac}{c-a}}{a - \frac{ac}{c-a}} = \frac{c}{a}, Y = a\left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a}$

ア) $a = c$ のとき接点なし

イ) $a \neq c$ のとき接点は $\left(\frac{c}{a}, \frac{c^2}{a}\right)$ (答)

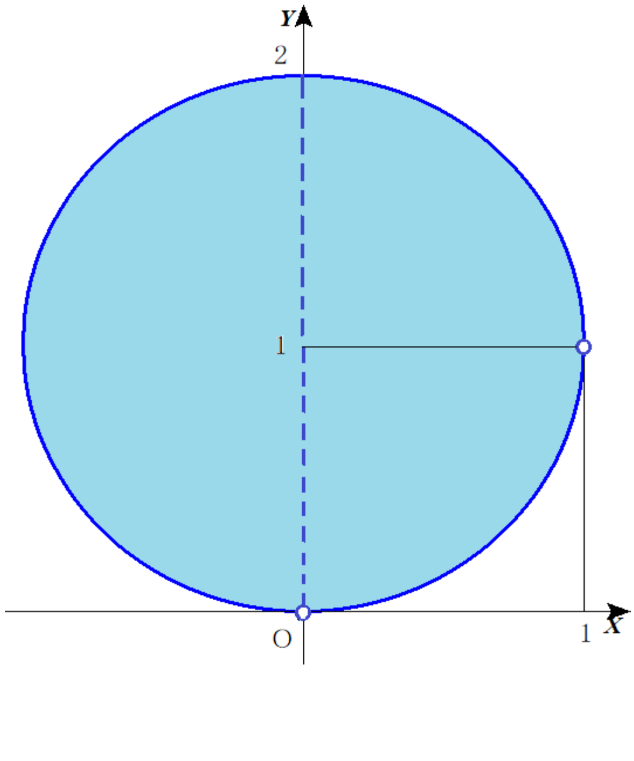
(2) 前問で示したように、接点は放物線 $Y = aX^2$ にある。

しかも a, c は(例外を除いて)自由に動くから放物線もいろんな放物線を描くから、接点はほぼ全平面上を動く。例外だが、まず c ≠ 0 より $X \neq 0 \wedge Y \neq 0$ で、<u>両座標軸は除く</u>。また a,≠c だから点<u>(1, 1)も除く</u>。次に (i) $1 + c^2 \leq 2a$ だが

$$X = \frac{c}{a}, Y = \frac{c^2}{a} \rightarrow a = \frac{c^2}{Y} = \frac{a^2X^2}{Y}, a = \frac{Y}{X^2}, c = aX = \frac{Y}{X}$$

より $1 + \frac{Y^2}{X^2} \leq \frac{2Y}{X^2} \rightarrow X^2 + (Y-1)^2 \leq 1$ (<u>中心(0, 1) で半径 1 の円内</u>)

これより図を描けば右図。(答)



【２】mod.3 で

ア)　$n \equiv 0$　ならば　$n^3 - 7n + 9 \equiv 0^3 - 7 \times 0 + 9 \equiv 0$

イ)　$n \equiv 1$　ならば　$n^3 - 7n + 9 \equiv 1^3 - 7 \times 1 + 9 \equiv 0$

ウ)　$n \equiv 2$　ならば　$n^3 - 7n + 9 \equiv 2^3 - 7 \times 2 + 9 \equiv 0$

だから、n がいかなる素数でも問題の数は 3 の倍数である。3 の倍数かつ素数は、3 しかないから

$$n^3 - 7n + 9 = 3$$

の整数解を求めればよい。因数定理を使って

$$(n-1)(n-2)(n+3) = 0 \to n = 1, 2, -3 \quad \text{(答)}$$

【3】 $\angle ACB=\angle ADB=\theta$ とおけば正弦定理より

$$AB=2R\sin\angle ACB=2\sin\theta$$

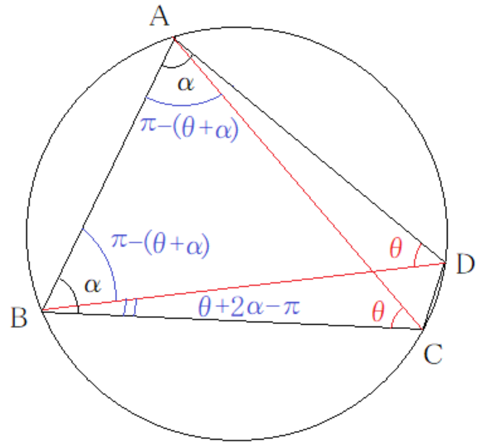
であり、 $\angle ABD=\angle BAC=\pi-(\theta+\alpha)$ より

$$AD=2\sin(\pi-(\theta+\alpha))=2\sin(\theta+\alpha)\ ,$$

$$BC=2\sin(\theta+\alpha)\ ,$$

また $\angle CBD=\theta+2\alpha-\pi$

$$CD=2\sin(\theta+2\alpha-\pi)=-2\sin(\theta+2\alpha)$$



よって

$$k=2\sin\theta\cdot 2\sin(\theta+\alpha)\cdot\{-2\sin(\theta+2\alpha)\}\cdot 2\sin(\theta+\alpha)$$

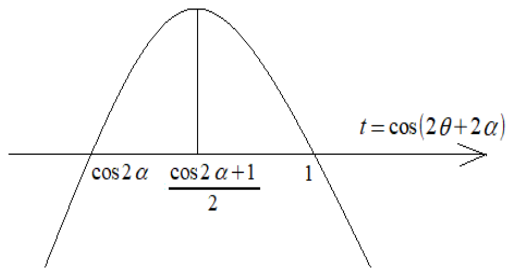
$$=-16\sin\theta\sin^2(\theta+\alpha)\sin(\theta+2\alpha)$$

ところで積を和・差に直す公式により

$$\sin(\theta+2\alpha)\sin\theta=-\frac{1}{2}\{\cos(2\theta+2\alpha)-\cos 2\alpha\}\ ,$$

半角の公式により

$$\sin^2(\theta+\alpha)=\frac{1-\cos(2\theta+2\alpha)}{2}$$



したがって

$$k=-4\{\cos(2\theta+2\alpha)-\cos 2\alpha\}\{\cos(2\theta+2\alpha)-1\}$$

θ の変域は

$$\pi-(\theta+\alpha)>0,\theta+2\alpha-\pi>0\rightarrow\pi-2\alpha<\theta<\pi-\alpha$$

だから $2(\pi-\alpha)<2(\theta+\alpha)<2\pi\Leftrightarrow\cos 2\alpha<\cos 2(\theta+\alpha)<1$

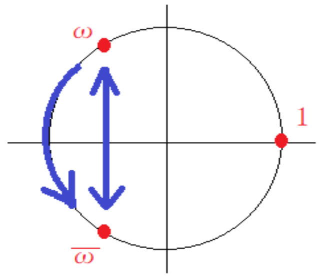
ここで $t=\cos(2\theta+2\alpha)$ とおけば t についての 2 次関数(上に凸の放物線) になることから分かるように、k が最大になるのは

$$\cos 2(\theta+\alpha)=\frac{\cos 2\alpha+1}{2}$$

のときである。求めるべき最大値は

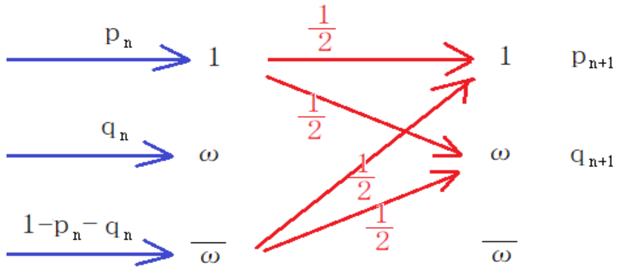
$$k=-4\times\{-(\frac{\cos 2\alpha+1}{2}-\cos 2\alpha)^2\}=4(\frac{1-\cos 2\alpha}{2})^2=4\sin^4\alpha\quad(答)$$

【4】1 の 3 乗根　$1, \omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \bar{\omega} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$　の 3 点の間を移動する。移動法は、表なら x 軸についての対称移動、裏なら 120 度の回転移動である。



n 回目に 1 にいる確率を　p_n　，　ω　にいる確率を　q_n　とする。
右の樹形図から

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n-q_n)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q_n \quad ,$$
$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n-q_n)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q_n$$



第 2 式から極限値を　α　とおけば

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha \to \alpha = \frac{1}{3}$$

だから

$$q_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(q_n - \frac{1}{3}\right)$$

と分かる。よって　$q_n - \dfrac{1}{3} = \left(q_1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　となるので、先の第 1 式より

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

インデックス(添字) を 1 つずらして

$$p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{(答)}$$

【5】(1) 接点は $A=(x(t),y(t))=(t,\log t)$ で接線の傾きは $(\log x)'_{x=t}=\dfrac{1}{t}$ だから、法線の傾きは $-t$ で、法線ベクトルは $(1,-t)$,よって $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,-t)$ で、 $B=A+\overrightarrow{AB}$ だから

$$B=(u(t),v(t))=(t+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\log t-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}})\quad \text{(答)}$$

$$(\frac{du(t)}{dt},\frac{dv(t)}{dt})=(1-\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}},\frac{1}{t}-\frac{\sqrt{1+t^2}-t\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2})=(1-\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}},\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)^3})\quad \text{(答)}$$

(2) $$L_1(r)=\int_{t=r}^1\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_r^1\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt=\int_r^1\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt=\int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt\quad ,$$

$$L_2(r)=\int_{t=r}^1\sqrt{du^2+dv^2}=\int_r^1\sqrt{(\frac{du}{dt})^2+(\frac{dv}{dt})^2}\,dt=\int_r^1\sqrt{(1-\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}})^2+(\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}})^2}\,dt$$

$$=\int_r^1\frac{1}{t\sqrt{(1+t^2)^3}}\sqrt{(t\sqrt{(1+t^2)^3}-t^2)^2+(\sqrt{(1+t^2)^3}-t)^2}\,dt$$

$$=\int_r^1\frac{1}{t\sqrt{(1+t^2)^3}}\sqrt{1+t^2}(\sqrt{(1+t^2)^3}-t)\,dt=\int_r^1\frac{\sqrt{(1+t^2)^3}-t}{t(1+t^2)}\,dt=\int_r^1(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}-\frac{1}{1+t^2})\,dt$$

だから

$$L_1(r)-L_2(r)=\int_r^1\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$t=\tan\theta$, $dt=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ と置換すればよい。 $r=\tan\theta_0$ とおく。

$$\int_r^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_{\theta_0}^{\pi/4}\cos^2\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\pi}{4}-\theta_0$$

よって $\displaystyle\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))=\lim_{\theta_0\to+0}(\frac{\pi}{4}-\theta_0)=\frac{\pi}{4}$ (答)

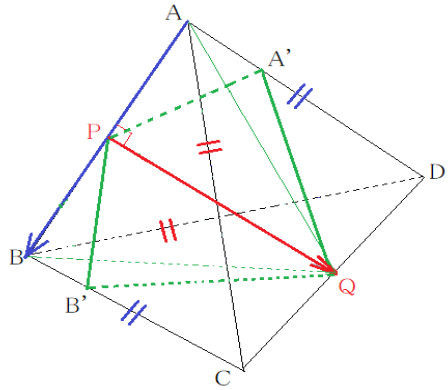
【6】(1) $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$

だから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|\cos(\pi-\angle ABD)$



ところで AB 共通で、△ABC と △BAD は合同だから

∠BAC＝ ∠ABD

で、かつ $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$ なので、 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ ■

(2) △ABQ で四面体を分断する（図参照）と、2 つの四面体 C-ABQ(手前側)と D-ABQ(向こう側)ができる。これらの立体は底面共通で高さは CQ : QD より等しいから、体積は等しい。
次に切り方を少しずつずらしてみよう。図のように四角形 PA'QB' で切るのだが、点 A' は A から D へ向かい、点 B' は B から C へ向かう。このとき AA'=BB' である。なぜなら C-ABQ を直線 PQ を軸にして 180°回転すると D-ABQ に重なるからである。（それは線分 PQ が二等辺三角形 QAB の頂点 Q から底辺に下した垂線になっていることから分かる。）
さて、二分される立体は切り方を変えた後、四面体 A-A'PQ と B-B'PQ の分だけ体積が増えて、減るのだがこれら 2 つの四面体は合同で体積が等しい。したがって差し引き、分割法を変えても体積は半々のまま変わらない。
切り口の変化を反対にして点 A' を A から C へ向かうようにしてもまったく同様の論法となる。■