注　意　問題**1**，**2**，**3**，**4**，**5**の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ム）については，分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

1

（1）　複素数 x が $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$ を満たすとする。$y=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと y の満たす2次方程式は $\boxed{\quad（ア）\quad}=0$ である。したがって元の方程式の解を複素数の範囲ですべて求めると $\boxed{\quad（イ）\quad}$ となる。

（2）　実数 x，y が $x^3+y^3+xy-3=0$ を満たすとする。$s=x+y$，$t=xy$ とおくと，t は s を用いて $t=\boxed{\quad（ウ）\quad}$ と表せる。さらにこのとき s のとりうる値の範囲は $\boxed{\quad（エ）\quad}$ である。

（3）　3で割った余りが1となる自然数 n に対し，$(x-1)(x^{3n}-1)$ が $(x^3-1)(x^n-1)$ で割り切れることを証明しなさい。

2

座標平面上で点Pは原点Oを出発点とし，さいころを投げて1または2の目が出たときは x 軸方向の正の向きに1進み，3または4の目が出たときは y 軸方向の正の向きに1進み，5または6の目が出たときは y 軸方向の負の向きに1進むものとする。たとえば，さいころを3回投げて，1回目に2，2回目に5，3回目に4の目が出たとすると，点Pの座標は順に $(1,\ 0)$, $(1,\ -1)$, $(1,\ 0)$ となる。

(1) さいころを2回投げたとき，点Pの y 座標が0である確率は $\boxed{\text{(オ)}}$ である。

(2) さいころを3回投げたとき，点Pの x 座標または y 座標が1以上である確率は $\boxed{\text{(カ)}}$ である。

(3) さいころを4回投げたとき，点Pの x 座標が2以上である確率は $\boxed{\text{(キ)}}$ であり，点Pの x 座標が2以上であるという条件の下で点Pの y 座標が0である条件付き確率は $\boxed{\text{(ク)}}$ である。

(4) さいころを n 回 $(n \geqq 2)$ 投げたときはじめて点Pの x 座標が2となる確率は $\boxed{\text{(ケ)}}$ である。

(5) さいころを n 回 $(n \geqq 3)$ 投げたとき，1回目から n 回目までに点Pが直線 $x=2$ 上の格子点を2つ以上通る確率は $\boxed{\text{(コ)}}$ である。ただし，座標平面上で x 座標，y 座標がともに整数である点 $(x,\ y)$ のことを格子点といい，さいころを n 回投げたとき，点Pが直線 $x=2$ 上の格子点にいる場合は，n 回目までにこの格子点を通ったものとする。

3

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し $a_n=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx$ とおく。

(1) a_1 を計算すると $a_1=\boxed{\quad（サ）\quad}$ である。また，部分積分を用いると 2 以上の自然数 n に対し $a_n=\boxed{\quad（シ）\quad}a_{n-2}$ となることがわかる。

(2) a_na_{n-1} を n を用いて表すと $a_na_{n-1}=\boxed{\quad（ス）\quad}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ である。

(3) 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right\}$ が 1 に収束することを証明しなさい。

(4) 以上の結果を用いると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n=\boxed{\quad（セ）\quad}$ であることがわかる。

4

空間内に $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$ となる2点O，Aがあり，空間内の図形 S は，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点P全体からなるとする。点Bは図形 S 上の点で，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=6$ であるとし，直線ABと図形 S との交点のうち，点Bとは異なる点をCとする。点Dは図形 S 上の点で，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ であるとする。

(1)　$\angle\mathrm{AOB}=$ $\boxed{\text{（ソ）}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=$ $\boxed{\text{（タ）}}$ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+$ $\boxed{\text{（チ）}}$ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。また，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=$ $\boxed{\text{（ツ）}}$ である。

(2)　3点A，B，Dを含む平面で図形 S を切った切り口の曲線を T とし，曲線 T 上の点Qが $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}$（$s$，$t$，$u$ は実数）を満たすとする。このとき s と t は関係式

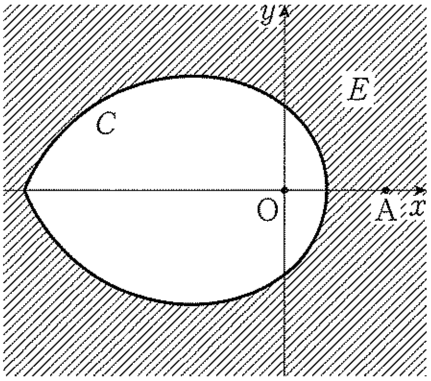
$$s^2+\boxed{\text{（テ）}}\,t^2+\boxed{\text{（ト）}}\,st+\boxed{\text{（ナ）}}\,s+\boxed{\text{（ニ）}}\,t=\boxed{\text{（ヌ）}}$$

を満たす。

(3)　曲線 T 上の点で，点Oからの距離が最大となる点をEとする。$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=$ $\boxed{\text{（ネ）}}$ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+$ $\boxed{\text{（ノ）}}$ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+$ $\boxed{\text{（ハ）}}$ $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と表すことができる。また，四面体OCDEの体積は $\boxed{\text{（ヒ）}}$ である。

5

座標平面上に図の太線のような曲線Cがあり，その外部（図の斜線部分，境界線Cを含む）を領域Eとする。曲線C上の点Pは次の条件を満たすとする。ただしvは1より大きい実数である。



> 線分OPの長さと，点A(1, 0)から点Pへの領域E内の最短経路の長さの比が$1:v$である。

（1） $\mathrm{OQ}:\mathrm{AQ}=1:v$を満たす点Qの軌跡$S$は円であり，その半径は $\boxed{\text{（フ）}}$ である。点Aを通る直線が，y座標が正の点Bで円Sに接するとき，点Bの座標は$\left(\boxed{\text{（ヘ）}},\ \boxed{\text{（ホ）}}\right)$である。

曲線Cの$x \geqq \boxed{\text{（ヘ）}}$の部分は円$S$の一部となる。曲線$C$の$x \leqq \boxed{\text{（ヘ）}}$，$y \geqq 0$の部分を曲線$C_1$とする。曲線$C_1$上の点Rに対し，点Aから点Rへの領域$E$内の最短経路は，線分ABと，点Bから点Rまでの曲線C_1の部分をつなげたものである。

（2） 極座標$(r,\ \theta)$に関する曲線C_1の極方程式を$r=f(\theta)$とし，点Bの偏角をθ_0，点Rの偏角をθ_1とする。このとき，点Aから点Rまでの領域E内の最短経路の長さは$f(\theta)$とその導関数$f'(\theta)$を用いると

$$\mathrm{AB}+\int_{\theta_0}^{\theta_1}\boxed{\text{（マ）}}\,d\theta$$

となる。これが$vf(\theta_1)$に等しくなるので，$f(\theta)=\beta e^{\alpha(\theta-\theta_0)}$の形をしているとして$\alpha$，$\beta$を求めると$\alpha=\boxed{\text{（ミ）}}$となる。特に$v=\sqrt{2}$のとき，曲線$C$で囲まれた領域の面積は $\boxed{\text{（ム）}}$ となる。