

【1】(1) x^2 で割って

$$x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = y^2 - 2y + 1 = 0 \quad (\text{アの答})$$

$$y = x + \frac{1}{x} = 1 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (\text{イの答})$$

(2) $(x+y)^3 - 3xy(x+y) + xy - 3 = s^3 - 3st + t - 3 = 0$ だから

$$(1-3s)t = 3 - s^3 \rightarrow t = \frac{s^3 - 3}{3s - 1} \quad (\text{ウの答})$$

ところで x, y は $s = x + y, t = xy$ より 2 次方程式 $z^2 - sz + t = 0$ の実数解であるから、

$$D = s^2 - 4t \geq 0 \rightarrow t \leq \frac{1}{4}s^2$$

s, t はウの答のうち、この不等式を満たす部分を動く。

そこで $t = \frac{1}{4}s^2$ とウの答を連立すると

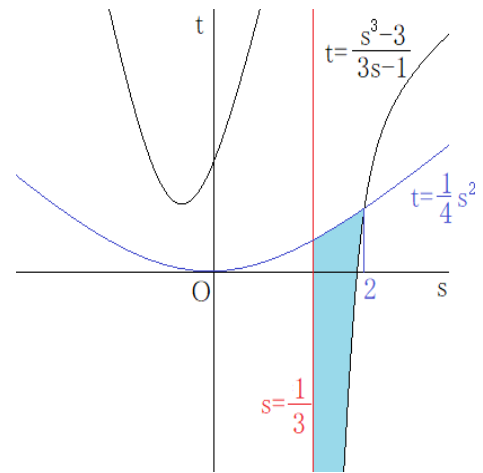
$$\frac{s^3 - 3}{3s - 1} = \frac{1}{4}s^2 \rightarrow s^3 + s^2 - 12 = 0 \rightarrow (s - 2)(s^2 + 3s + 6) = 0$$

より実数解は $s = 2$ のみである。

両者のグラフは微分をしなくても右図のようになることは分かる。

よって s の動く範囲は

$$\frac{1}{3} < s \leq 2 \quad (\text{エの答})$$



(3) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1), x^{3n} - 1 = (x^n - 1)(x^{2n} + x^n + 1)$ より

$$\frac{(x - 1)(x^{3n} - 1)}{(x^3 - 1)(x^n - 1)} = \frac{x^{2n} + x^n + 1}{x^2 + x + 1}$$

右辺の分母を因数分解すれば $x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \bar{\omega}), \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

問題の分数式が完全に約分できるためには分子が $\omega, \bar{\omega}$ の 2 数を解として持てばよい。

$n = 3k + 1$ とおいて、分子にこれら 2 数を代入すれば

$$x = \omega \Rightarrow \omega^{6k+2} + \omega^{3k+1} + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$x = \bar{\omega} \Rightarrow \bar{\omega}^{6k+2} + \bar{\omega}^{3k+1} + 1 = \bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$$

したがって分子 $x^{2n} + x^n + 1$ は $x^2 + x + 1$ で割り切れる。■

【2】(1) 横方向にしか動かないか、縦方向に動いて戻ってくるかだから、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_2C_1 \cdot \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad (\text{オの答})$$

(2) 横に少なくとも1回動けば目標達成、横に動かないときは上に3~2回動かねばならないから

$$\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right\} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{19}{27} + \frac{4}{27} = \frac{23}{27} \quad (\text{カの答})$$

(3) 横に4,3,2回動けばよいから

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_4C_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{81} + \frac{8}{81} + \frac{24}{81} = \frac{33}{81} = \frac{11}{27} \quad (\text{キの答})$$

このうち縦方向に動かないのは、(横4回)または(横2回上下各1回)だから

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{4!}{2!1!1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81} + \frac{12}{81} = \frac{13}{81}$$

よって、求めるべき条件付確率は $\frac{13}{81} \div \frac{11}{27} = \frac{13 \times 27}{81 \times 11} = \frac{13}{33}$ (クの答)

(4) 初めの n-1 回で1回だけ横に動き、n 回目に横に動くから

$${}_{n-1}C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \times \frac{1}{3} = (n-1) \frac{2^{n-2}}{3^n} \quad (\text{ケの答})$$

(5) 横に2回動いた直後に1回縦に動けばよい。すなわち

縦縦縦縦横縦縦縦横縦 ○○○○

だから、二重下線と波下線に分けて考えて

$$\sum_{k=0}^{n-3} (k+1) \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \times \left\{\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\right\} = \frac{2}{3^3} \sum_{k=0}^{n-4} (k+1) \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

である。あとはシグマの計算だが、

$$\sum_{k=0}^{n-3} (k+1)x^k = \left\{ \sum_{k=-1}^{n-3} x^{k+1} \right\}' = \left(\frac{x^{n-1}-1}{x-1} \right)' = \frac{(n-1)x^{n-2}(x-1) - (x^{n-1}-1)}{(x-1)^2}$$

より

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-3} (k+1) \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \frac{(n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 1\right)}{\frac{1}{9}} \\ &= -3(n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - 9 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 9 \\ &= -3(n+1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + 9 \end{aligned}$$

したがって求めるべき確率は

$$\frac{2}{3^3} \left\{ -3(n+1) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + 9 \right\} = -(n+1) \cdot \frac{2^{n-1}}{3^n} + \frac{2}{3} \quad (\text{コの答})$$

【3】(1) a_1 は四分円の面積であるから $a_1 = \frac{\pi}{4}$ (サの答)

$$a_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^{2n}} dx = [x\sqrt{1-x^{2n}}]_0^1 - \int_0^1 x \cdot n\sqrt{1-x^{2n-1}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx = n \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^{2n-2}} \cdot x dx$$

となるが、一方

$$a_n = \int_0^1 (1-x^2)\sqrt{1-x^{2n-2}} dx = a_{n-2} - \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^{2n-2}} dx$$

であるから $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^{2n-2}} dx = a_{n-2} - a_n$ と変形して代入すれば

$$a_n = n(a_{n-2} - a_n) \rightarrow a_n = \frac{n}{n+1} a_{n-2} \quad (\シの答)$$

(2) 漸化式を繰り返し使えば

ア) n が偶数 $n=2N$ のとき $a_{2N} = \frac{2N}{2N+1} a_{2N-2} = \frac{2N}{2N+1} \cdot \frac{2N-2}{2N-1} \cdots \frac{2}{3} a_0$

イ) n が奇数 $n=2N-1$ のとき $a_{2N-1} = \frac{2N-1}{2N} a_{2N-3} = \frac{2N-1}{2N} \cdot \frac{2N-3}{2N-2} \cdots \frac{3}{4} a_1$

よって

$$a_{2N} a_{2N-1} = \frac{(2N)(2N-1)(2N-2)(2N-3)\cdots 3 \cdot 2}{(2N+1)(2N)(2N-1)(2N-2)\cdots 4 \cdot 3} a_1 a_0 = \frac{2}{2N+1} a_1 a_0 = \frac{\pi}{2(2N+1)},$$

$$a_{2N+1} a_{2N} = \frac{(2N+1)(2N)(2N-1)(2N-2)\cdots 3 \cdot 2}{(2N+2)(2N+1)(2N)(2N-1)\cdots 4 \cdot 3} a_1 a_0 = \frac{2}{2N+2} a_1 a_0 = \frac{\pi}{2(2N+2)}$$

これを1つの式にまとめると $a_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ (スの答)

(3) $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$ だから $\sqrt{1-x^{2n}}$ は n が大きくなるほど小さくなる。よって $a_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^{2n}} dx > 0$ は単調減少の数

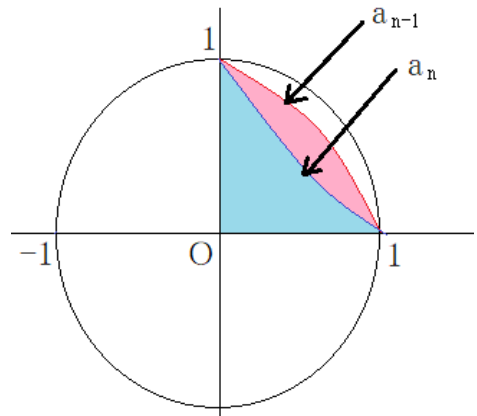
列であって $0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq 1$ である。ところで(1)の答より

$$\frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{n}{n+1} \quad \text{だから}$$

$$1 \geq \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{n}{n+1}$$

挟み打ちにより

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \quad \blacksquare$$



(4) (2)の答より $n a_n^2 = n a_n a_{n-1} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n\pi}{2(n+1)} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$ だから、

$$\lim \sqrt{n} a_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\ゼの答)$$

であると予想される。実際、

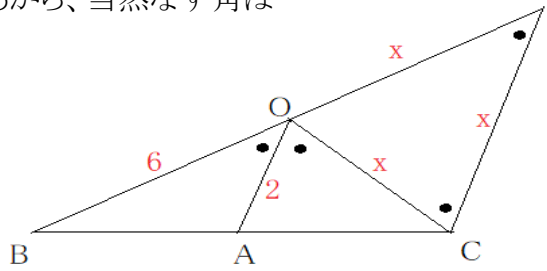
$$0 \leq \left| \sqrt{n} a_n - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right| = \frac{\left| n a_n^2 - \frac{\pi}{2} \right|}{\left| \sqrt{n} a_n + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right|} \leq \frac{\left| n a_n^2 - \frac{\pi}{2} \right|}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

において $\lim n a_n^2 = \frac{\pi}{2}$ だったから挟み打ちができる。

【4】(1) $|\vec{OP}| = \vec{OA} \cdot \vec{OP} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OP}| \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$ より S は OA と 60° の角をなす半直線を OA の周りに回転してできる円錐である。点 B は S 上にあるから、当然なす角は $\angle AOB = 60^\circ$ (ツの答)

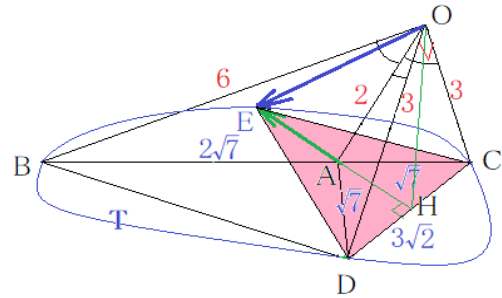
点 C を通って OA に平行線を引く。右図のように正三角形ができるので1辺の長さを x とおけば

$$\begin{aligned} 2 : x &= 6 : (x+6) \rightarrow x = 3, \\ AC : CB &= x : 6+x = 1 : 3, \\ \vec{OC} &= \frac{3\vec{OA} - \vec{OB}}{-1+3} = \frac{3}{2}\vec{OA} + (-\frac{1}{2})\vec{OB} \quad (\text{タ・チの答}) \end{aligned}$$



また $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = \frac{3}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OD} - \frac{1}{2}\vec{OB} \cdot \vec{OD}$ より

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{2} \times 2 \cdot 3 \cos 60^\circ - \frac{1}{2} \vec{OB} \cdot \vec{OD}, \\ 0 &= \frac{3}{2} \times 2 \cdot 3 \cos 60^\circ - \frac{1}{2} \vec{OB} \cdot \vec{OD}, \\ \vec{OB} \cdot \vec{OD} &= 9 \quad (\text{ツの答}) \end{aligned}$$



(2) $\vec{OQ} \cdot \vec{OA} = (s\vec{OA} + t\vec{OB} + u\vec{OD}) \cdot \vec{OA} = 4s + 6t + 3u$ と $\vec{OQ} \cdot \vec{OA} = |\vec{OQ}| \cdot |\vec{OA}| \cos 60^\circ = |\vec{OQ}|$ より $|\vec{OQ}| = 4s + 6t + 3u$,

また

$$\begin{aligned} |\vec{OQ}|^2 &= (s\vec{OA} + t\vec{OB} + u\vec{OD}) \cdot (s\vec{OA} + t\vec{OB} + u\vec{OD}) \\ &= s^2|\vec{OA}|^2 + t^2|\vec{OB}|^2 + u^2|\vec{OD}|^2 + 2st\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 2tu\vec{OB} \cdot \vec{OD} + 2us\vec{OD} \cdot \vec{OA} \\ &= 4s^2 + 36t^2 + 9u^2 + 12st + 18tu + 6us \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} (4s + 6t + 3u)^2 &= 4s^2 + 36t^2 + 9u^2 + 12st + 18tu + 6us, \\ 2s^2 + 6st + 3tu + 3us &= 0 \end{aligned}$$

ところで点 Q は平面 ABD 上にあるから $s + t + u = 1$ なので、u を消去すれば

$$\begin{aligned} 2s^2 + 6st + 3(s+t)(1-s-t) &= 0 \rightarrow s^2 + 3t^2 - 3s - 3t = 0 \quad (*) \\ s^2 + 3t^2 + 0st + (-3)s + (-3)t &= 0 \quad (\text{テ～ヌの答}) \end{aligned}$$

(3) (*) の条件の下での点 O からの距離: $|\vec{OQ}| = 4s + 6t + 3u = s + 3t + 3 = k$ の最大だが、(*) は

$$\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 3$$

という楕円を表すからこれと接する(判別式=0)ときが最大・最小である。

$$\left(k - 3t - \frac{9}{2}\right)^2 + 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 3 \rightarrow 12t^2 + 6(4-k)t + k^2 - 9k + 18 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 9(4-k)^2 - 12(k^2 - 9k + 18) = -3(k^2 - 12k + 24) = 0,$$

$$k = 6 \pm 2\sqrt{3}$$

最大値は $k = 6 + 2\sqrt{3}$ で、そのとき $t = \frac{-3(4-k)}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $s = k - 3t - 3 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$,

$$\vec{OE} = \vec{OQ} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}\vec{OA} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\vec{OB} - (1+\sqrt{3})\vec{OD} \quad (\text{ネ～ハの答})$$

$\triangle OCD$ は直角二等辺三角形だから $CD=3\sqrt{2}$, CD の中点を H とすれば $OH \perp CD$ かつ、
 $OH = \frac{3}{\sqrt{2}}$. また $\triangle ACD$ は $AC=AD=\sqrt{4+9-6}=\sqrt{7}$ (余弦定理) だから二等辺三角形である

からは $AH \perp CD$ かつ $AH = \sqrt{7 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$. したがって直線 CD は $\triangle OAH$ ($\triangle OEH$) の作る平面に垂直である。四面体の体積を求めるにあたって、 $\triangle OEH$ が底面、 CD が高さと考えるのがよい。ところで、線分 AB の中点を M とすれば $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(2AC) = AC$ より、 $DM = 2AH$.

また

$$\begin{aligned} \vec{AE} &= \vec{OE} - \vec{OA} = (1+\sqrt{3})\left(\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} - \vec{OD}\right) \\ &= (1+\sqrt{3})(\vec{OM} - \vec{OD}) = (1+\sqrt{3})\vec{DM} = 2(1+\sqrt{3})\vec{HA} \end{aligned}$$

だから、

$$EH = AE + AH = 2(1+\sqrt{3})AH + AH = (3+2\sqrt{3})\sqrt{\frac{5}{2}}$$

次に

$$\cos \angle OHA = \frac{OH^2 + AH^2 - OA^2}{2OH \cdot AH} = \frac{1}{\sqrt{5}} ,$$

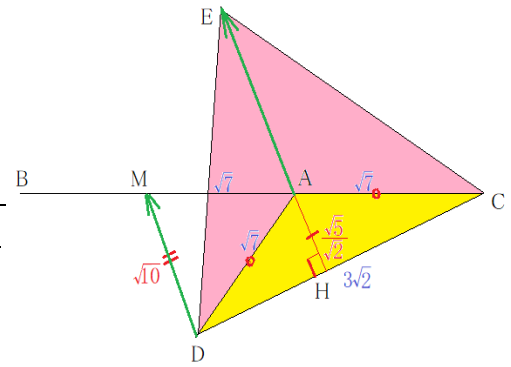
$$\sin \angle OHA = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

に注意して底面 OEH の面積は

$$\triangle OEH = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot EH \sin \angle OHA = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot (3+2\sqrt{3}) \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{9+6\sqrt{3}}{2} .$$

四面体の体積は

$$V = \frac{1}{3} \triangle OEH \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{9+6\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}+6\sqrt{6}}{2} \quad (\text{ヒの答})$$



【5】(1) アポロニウスの円である。 $Q=(x, y)$ とすれば

$$OQ^2 : AQ^2 = x^2 + y^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 : v^2,$$

$$v^2(x^2 + y^2) = (x-1)^2 + y^2,$$

$$(v^2 - 1)x^2 + 2x + (v^2 - 1)y^2 = 1,$$

$$\left(x + \frac{1}{v^2 - 1}\right)^2 - \frac{1}{(v^2 - 1)^2} + y^2 = \frac{1}{v^2 - 1},$$

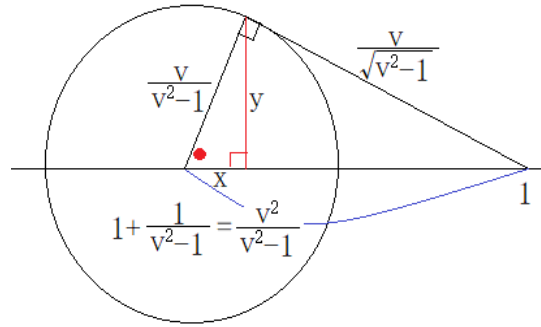
$$\left(x + \frac{1}{v^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{v^2}{(v^2 - 1)^2}$$

円の中心は $\left(-\frac{1}{v^2 - 1}, 0\right)$, 半径 $\frac{v}{v^2 - 1}$ (フの答)

円の接線は半径と直交するから、三角形の相似により

$$x : y : \frac{v}{v^2 - 1} = \frac{v}{v^2 - 1} : \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}} : \frac{v^2}{v^2 - 1} \rightarrow x = \frac{1}{v^2 - 1}, y = \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

よって $B = \left(-\frac{1}{v^2 - 1}, 0\right) + \left(\frac{1}{v^2 - 1}, \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}\right)$ (へホの答)



(2) 曲線 BR の弧長は $l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ だから

$$x = r(\theta) \cos \theta, y = r(\theta) \sin \theta$$

を微分して

$$dx = r'(\theta) \cos \theta d\theta - r(\theta) \sin \theta d\theta, dy = r'(\theta) \sin \theta d\theta + r(\theta) \cos \theta d\theta,$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{r'^2(\theta) + r^2(\theta)} d\theta$$

よって $AB + l = AB + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta$ (マの答)

(3) 曲線が連続的につながらないといけなないので $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $f(\theta_0) = \beta = \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}$

$f'(\theta) = \alpha \beta e^{\alpha(\theta - \theta_0)}$ に注意する。

もし $\alpha = 0$ なら $f(\theta)$ は原点中心の円になるから $AB + \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}(\theta - \theta_0) = v \times \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}$ だが、右

辺は定数だからこれはありえない。よって $\alpha \neq 0$ であって

$$AB + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \beta \sqrt{\alpha^2 + 1} e^{\alpha(\theta - \theta_0)} d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{v^2 - 1}} + \left[\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + 1} e^{\alpha(\theta - \theta_0)} \right]_{\theta_0}^{\theta_1}$$

$$= \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}} + \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + 1} (e^{\alpha(\theta_1 - \theta_0)} - 1)$$

より

$$\frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}} + \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + 1} (e^{\alpha(\theta_1 - \theta_0)} - 1) = v \beta e^{\alpha(\theta_1 - \theta_0)} \quad (*)$$

$$\beta \left(\frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + 1} - v \right) e^{\alpha(\theta_1 - \theta_0)} = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + 1} - \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

両辺を β で割って

$$\left(\frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + 1} - v \right) e^{\alpha(\theta_1 - \theta_0)} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + 1} - v$$

微分して

$$\left(\sqrt{\alpha^2 + 1} - v \alpha \right) e^{\alpha(\theta_1 - \theta_0)} = 0 \rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 1} - v \alpha = 0 \rightarrow \alpha^2 + 1 = v^2 \alpha^2 \rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

(*) の両辺は単調増加でなければならないから $\alpha > 0$ であって $\alpha = \frac{1}{\sqrt{v^2-1}}$ (㉓の答)

まだ、これでは十分ではない。いま求めたのは必要条件であって、曲線 C_1 が右図の赤色ならよいが青色だと話が成立しない。そのために C_1 が常に直線 AB の下側にあることを示す。

$$x + \sqrt{v^2-1}y - 1 \leq 0, r = \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} e^{\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{v^2-1}}}, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta,$$

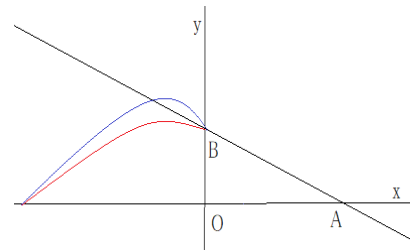
$$r(\cos \theta + \sqrt{v^2-1} \sin \theta) \leq 1, r = \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} e^{\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{v^2-1}}}$$

上の不等式が成り立てばよいのだが、不等式の左辺は θ の単調減少関数で $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}(0 + \sqrt{v^2-1} \cdot 1) = 1 \text{ だから OK である。実際、左辺の導関数は } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ のとき}$$

$$\frac{1}{\sqrt{v^2-1}} r(\cos \theta + \sqrt{v^2-1} \sin \theta) + r(-\sin \theta + \sqrt{v^2-1} \cos \theta) = r \left(\frac{1}{\sqrt{v^2-1}} + \sqrt{v^2-1} \right) \cos \theta \leq 0$$

だから単調減少である。



$$v = \sqrt{2} \text{ だと } \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} = 1, B = (0, 1), r = f(\theta) = e^{\theta-\pi/2}$$

面積は上半を計算して2倍すればよい。

第1象限にある(赤色部分)のは円の1/8から直角二等辺三角形を引いたものであるから

$$\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{8} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

第2象限にある部分は

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{2(\theta-\pi/2)} d\theta = \frac{1}{4} [e^{2(\theta-\pi/2)}]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{4} (e^{\pi} - 1)$$

よって求めるべき面積は $S = 2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (e^{\pi} - 1) \right\} = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} e^{\pi}$ (㉔の答)

