

- 1 座標空間の4点  $A(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $B(0, 0, 1)$ ,  
 $C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$ ,  $D(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$  に対し,

$$\vec{p} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}, \quad \vec{q} = (1-s)\vec{OC} + s\vec{OD}$$

とおく。ただし、 $O$  は原点、 $s$  と  $t$  は実数とする。

- (1)  $|\vec{p}|$ ,  $|\vec{q}|$  と内積  $\vec{p} \cdot \vec{q}$  を  $s$ ,  $t$  で表せ。
- (2)  $t = \frac{1}{2}$  のとき、ベクトル  $\vec{p}$  と  $\vec{q}$  のなす角が  $\frac{3}{4}\pi$  となるような  $s$  の値を求めよ。
- (3)  $s$  と  $t$  が実数を動くとき、 $|\vec{p} - \vec{q}|$  の最小値を求めよ。

- 2  $z + \frac{4}{z}$  が実数となるような  $0$  と異なる複素数  $z$  の全体を  $D$  とする。

- (1)  $D$  を複素数平面上に図示せよ。
- (2)  $k$  を実数とする。 $D$  に属する  $z$  で方程式

$$k\left(z + \frac{4}{z} + 8\right) = i\left(z - \frac{4}{z}\right)$$

を満たすものが存在するような  $k$  の値の範囲を求めよ。ただし、 $i$  は虚数単位を表す。

3 数字の 2 が書かれたカードが 2 枚、同様に、数字の 0, 1, 8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚、あわせて 8 枚のカードがある。これらから 4 枚を取り出し、横一列に並べてできる自然数を  $n$  とする。ただし、0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は、 $n$  は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える。例えば、左から順に 0, 0, 1, 1 の数字のカードが並ぶ場合の  $n$  は 11 である。

- (1)  $a, b, c, d$  は整数とする。  $1000a + 100b + 10c + d$  が 9 の倍数になることと  $a + b + c + d$  が 9 の倍数になることは同値であることを示せ。
- (2)  $n$  が 9 の倍数である確率を求めよ。
- (3)  $n$  が偶数であったとき、 $n$  が 9 の倍数である確率を求めよ。

4 座標平面上に 3 点  $O(0, 0)$ ,  $A(\frac{15}{2}, 0)$ ,  $B(11, 11)$  がある。条件

$$BQ \geq OQ \geq 2AQ$$

を満たす点  $Q(x, y)$  の全体を  $D$  とする。

- (1)  $D$  を座標平面上に図示せよ。また、 $BQ = OQ = 2AQ$  となるすべての点  $Q$  の座標を求めよ。
- (2)  $0 < p \leq 11$  とし、 $P$  を点  $(p, 11)$  とする。条件  $OQ \geq PQ$  を満たす  $D$  の点  $Q$  が存在するような  $p$  の値の範囲を求めよ。

5 2 つの関数

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$$

がある。

- (1)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  のとき、不等式  $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  のとき、不等式  $g(x) \leq f(x)$  が成り立つことを示せ。
- (3)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲において、2 つの曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  および  $y$  軸が囲む部分の面積を求めよ。