【1】(1) $\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB},\vec{c}=\overrightarrow{OC},\vec{d}=\overrightarrow{OD}$ とおく。

$$|\vec{p}|^2=\vec{p}\cdot\vec{p}=(1-t)^2|\vec{a}|^2-2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=1\cdot(1-t)^2-2t(1-t)\cdot 0+1\cdot t^2=2t^2-2t+1 \quad ,$$

$$|\vec{q}|^2=(1-s)^2|\vec{c}|^2-2s(1-s)\vec{c}\cdot\vec{d}+t^2|\vec{d}|^2=2\cdot(1-s)^2-2s(1-s)\cdot 0+2\cdot s^2=4s^2-4s+2$$

より $|\vec{p}|=\sqrt{2t^2-2t+1}, |\vec{q}|=\sqrt{4s^2-4s+2}$ (答)

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=(1-t)(1-s)\vec{a}\cdot\vec{c}+(1-t)s\vec{a}\cdot\vec{d}+t(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}+ts\vec{b}\cdot\vec{d}$$

$$=0\cdot(1-t)(1-s)+0\cdot(1-t)s-1\cdot t(1-s)-1\cdot ts=-t$$ (答)

(2) $t=\frac{1}{2}$ ならば $|\vec{p}|=\frac{1}{\sqrt{2}}, \vec{p}\cdot\vec{q}=-\frac{1}{2}$ であり、 $\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cos\frac{3}{4}\pi$ であるから

$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4s^2-4s+2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\to 4s^2-4s+2=1\to(2s-1)^2=0\to s=\frac{1}{2}$$ (答)

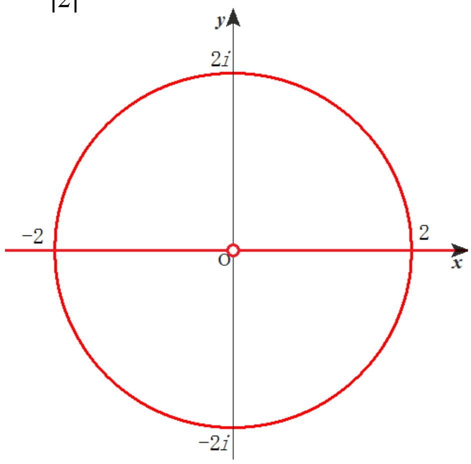
(3) $|\vec{p}-\vec{q}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=2t^2-2t+1-2(-t)+4s^2-4s+2=4s^2-4s+2t^2+3$

$=4\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 s+2t^2+2\geq 2$ より、最小値は $s=\frac{1}{2}, t=0$ のときで $|\vec{p}-\vec{q}|=\sqrt{2}$ (答)

【2】(1) 複素数 w の実部、虚部はそれぞれ $\Re Z=\frac{z+\bar{z}}{2}, \Im z=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ である。いま虚部が 0 より

$$\frac{1}{2i}\left\{\left(z+\frac{4}{z}\right)-\left(\bar{z}+\frac{4}{\bar{z}}\right)\right\}=\frac{1}{2i}\left\{(z-\bar{z})-\frac{4(z-\bar{z})}{|z|^2}\right\}=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})\left(1-\frac{4}{|z|^2}\right)=0 \quad ,$$

よって $(z-\bar{z}=0)\vee(|z|=2)$,すなわち z は $z\neq 0$ なる
実数または原点中心、半径 2 の円周上の点である。
(答)右図の赤い線の部分(原点を除く。)



(2) 方程式を k について解くと

$$k=\frac{i\left(z-\frac{4}{z}\right)}{z+\frac{4}{z}+8} \quad (*)$$

ア) z が円周上にあるとき

$$z=2(\cos\theta+i\sin\theta), \frac{4}{z}=\frac{4}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}=2(\cos\theta-i\sin\theta)$$

だから $k=\frac{i\cdot 4i\sin\theta}{4\cos\theta+8}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta+2}$.

関数 $f(\theta)=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta+2}(0\leq\theta<2\pi)$ の導関数は

$$f'(\theta)=\frac{-\cos\theta(\cos\theta+2)-\sin^2\theta}{(\cos\theta+2)^2}=-\frac{2\cos\theta+1}{(\cos\theta+2)^2}$$

だから $\frac{2}{3}\pi\leq\theta\leq\frac{4}{3}\pi$ で増加、それ以外の範囲で減少で、最小値は $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, 最大値は $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。よって $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq k\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$

イ) z が実数のとき。(*) の分子が 0 になり $k=0$ だが、それはア) の答に含まれる。
したがって k の取りうる値の範囲は $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq k\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$ (答)

【3】(1)　$1000a+100b+10c+d=(a+b+c+d)+9(111a+11b+c)=9k$　であれば

$$a+b+c+d=9(k-111a-11b-c)$$

でたしかに 9 の倍数だ。逆に　$a+b+c+d=9l$　なら

$$1000a+100b+10c+d=(a+b+c+d)+9(111a+11b+c)=9(l+111a+11b+c)$$

で 9 の倍数。■

(2) 4 枚の和が 9 か 18 になる確率だが、前問で示したようにカードをめくる順番は関係ない。そこで組合せから確率を求める。

全部で場合の数は　${}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$　通りある。そのうち、

ア)　$n=9$　になる場合。

どうしても 8 を 1 枚だけ使わざるを得ず、8100 が選ばれればよい。同じ数字のカードがあるので組合せは

$${}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_2=2\times2\times1=4\quad 通り。$$

イ)　$n=18$　になる場合。

8811 か 8820 だから

$${}_2C_2\times{}_2C_2+{}_2C_2\times{}_2C_1\times{}_2C_1=1\times1+1\times2\times2=5\quad 通り。$$

よって求めるべき確率は　$\frac{4+5}{70}=\frac{9}{70}$　(答)

(3) 偶数になる場合の数と確率を求めよう。順列は全部で

$${}_8P_4=8\times7\times6\times5\quad 通り。$$

そのうち偶数になる場合の数は下の桁からめくると考えて

$$6\times{}_7P_3=6\times(7\times6\times5)\quad 通り。$$

偶数になる確率は

$$\frac{6\times7\times6\times5}{8\times7\times6\times5}=\frac{6}{8}$$　(←一の位に 8 枚中の偶数 6 枚が来ればよいから当然。)

さて、偶数かつ 9 の倍数になる場合は何通りあるかというと、4 枚選んで(選び方の個数は前問で求めてある) → それを並べると考えて

ア) 8100 は　$4\times(3\times3!)=72$　通り、

イ) 8811 は　$1\times(2\times3!)=12$　通り、8820 は　$4\times4!=96$　通り

より、全部で　$72+12+96=180$　通りだから、偶数かつ 9 の倍数の確率は

$$\frac{180}{8\times7\times6\times5}$$

したがって求めるべき条件付き確率は

$$\frac{180}{8\times7\times6\times5}\div\frac{6\times7\times6\times5}{8\times7\times6\times5}=\frac{180}{6\times7\times6\times5}=\frac{1}{7}$$　(答)

【4】(1) 2 乗して　$(x-11)^2+(y-11)^2 \geq x^2+y^2 \geq 4\{(x-\frac{15}{2})^2+y^2\}$　から

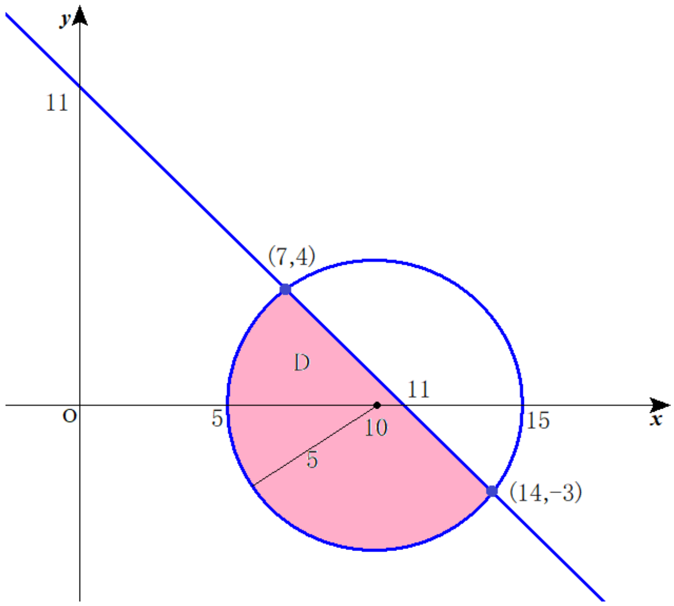
$$x+y-11 \leq 0,\ x^2-20x+y^2+75 \leq 0$$,

$$x+y \leq 11,\ (x-10)^2+y^2 \leq 25$$

直線の下方と円の内部の共通部分が答だ。
(答)右図の色付き部分(境界を含む)。
両方の等号が成立するのは、直線と円周の交点であるから連立方程式

$$x+y=11,\ (x-10)^2+y^2=25$$

を解いて　$Q=(x,y)=(7,4),(14,-3)$



(2)　$OQ \geq PQ$　も 2 乗して

$$x^2+y^2 \geq (x-p)^2+(y-11)^2$$,

$$2px+22y \geq p^2+121 \quad (*)$$

これが表す領域は直線の上方だ。だから
D のかどの点　$Q_1=(7,4), Q_2=(14,-3)$
のどちらか一方でも(*) の不等式を満足すればよい。
ア)　$Q_1=(7,4)$　を代入すれば

$$p^2-14p+33 \leq 0 \to (p-3)(p-11) \leq 0 \to 3 \leq p \leq 11 \quad ①$$

イ)　$Q_2=(14,-3)$　を代入すれば

$$p^2-28p+187 \leq 0 \to (p-11)(p-17) \leq 0 \to 11 \leq p \leq 17 \quad ②$$

①と②の合併が答なのだが、 $0<p \leq 11$　より　$3 \leq p \leq 11$　(答)

【5】(1)　$F(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$　とおくと

$$F(0)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\quad ,$$

$$F'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}=\frac{\pi\cos x-2}{\pi}$$

より増減表を書くと右の通り。よって

$$F(x)\geq 0\quad ■$$

x	0	…	x_0	…	$\frac{\pi}{2}$
F'		+	0	−	
F	0	↗		↘	0

(2)　$G(x)=f(x)-g(x)=\cos x-\left(\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-x^2}-\dfrac{\pi}{2}\right)$　とおく。その導関数は

$$G'(x)=-\left(\sin x-\frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}\right)$$

ところで　$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\to x^2\leq\dfrac{\pi^2}{4}\to\dfrac{\pi^2}{2}-x^2\geq\dfrac{\pi^2}{4}\to\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-x^2}\geq\dfrac{\pi}{2}$　だから

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}\leq\frac{2}{\pi}$$

となって、前問の答より

$$\sin x-\frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}\geq\sin x-\frac{2}{\pi}x\geq 0\quad ,\quad G'(x)\leq 0$$

G(x) は単調減少で　$G\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0-\left(\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-\dfrac{\pi^2}{4}}-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$　だから　$G(x)\geq 0$　■

(3) g の曲線は中心　$\left(0,-\dfrac{\pi}{2}\right)$，半径　$\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$　の上半円である。

$$S=\int_0^{\pi/2}(f(x)-g(x))\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(\cos x-\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}+\frac{\pi}{2}\right)dx$$

第 1 項は

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\pi/2}=1\quad ,$$

第 2 項は 8 分円から直角三角形を引いたものだから

$$\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}-\frac{\pi}{2}\right)dx=\pi\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2\div 8-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\div 2$$

$$=\frac{\pi^3}{16}-\frac{\pi^2}{8}\quad .$$

よって求めるべき面積は　$S=1-\dfrac{\pi^3}{16}+\dfrac{\pi^2}{8}$　(答)